4A) URČTE RIADKOVÚ NORMU MATICE $A = \begin{pmatrix} 0{,}8 & -1 & -0{,}3 \\ -0{,}4 & 1{,}2 & -1{,}1 \\ 1{,}5 & -0{,}2 & 0 \end{pmatrix}$.

$$\|A\|_r = \max\{|0{,}8| + |-1| + |-0{,}3| ;\ |-0{,}4| + |1{,}2| + |-1{,}1| ;\ |1{,}5| + |-0{,}2| + |0|\} =$$
$$= \max\{2{,}1 ;\ 2{,}7 ;\ 1{,}7\} = \underline{\underline{2{,}7}}$$

4B) OVERTE, ČI JE MATICA $B = \begin{pmatrix} -1{,}2 & 0{,}5 & -0{,}6 \\ -1{,}2 & 1{,}8 & 0{,}1 \\ -0{,}1 & -0{,}2 & -0{,}8 \end{pmatrix}$ RIADKOVO DIAGONÁLNE DOMINANTNÁ.

$$|-1{,}2| > |0{,}5| + |-0{,}6| \ \wedge\ |1{,}8| > |-1{,}2| + |0{,}1| \ \wedge\ |-0{,}8| > |-0{,}1| + |-0{,}2|$$
$$1{,}2 > 1{,}1 \checkmark \qquad 1{,}8 > 1{,}3 \checkmark \qquad 0{,}8 > 0{,}3 \checkmark$$

MATICA JE RIADKOVO DIAG. DOMIN.

5A) PRE SÚSTAVU ROVNÍC VYTVORTE POMOCOU JAKOBIHO METÓDY KONVERGENTNÝ ITERAČNÝ PROCES A ZO ŠTARTOVACIEHO BODU $[x^{(0)}, y^{(0)}, z^{(0)}] = [0, 0, 0]$ UROBTE 2 ITERÁCIE

$$-x - y + 8z = 9$$
$$10x + y + z = -9$$
$$x + 8y - z = -2$$

$$A \cdot \bar{x} = \bar{b}$$
$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 8 \\ 10 & 1 & 1 \\ 1 & 8 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -2 \end{pmatrix}$$

ABY ITERAČ. PROCES BOL KONVERG., MUSÍ BYŤ MATICA A RIADKOVO DIAG. DOMIN.

$$10x + y + z = -9 \Rightarrow x = \tfrac{1}{10}(-y - z - 9)$$
$$x + 8y - z = -2 \Rightarrow y = \tfrac{1}{8}(-x + z - 2) \quad \Rightarrow$$
$$-x - y + 8z = 9 \Rightarrow z = \tfrac{1}{8}(x + y + 9)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x^{(n+1)} &= -0{,}1\, y^{(n)} - 0{,}1\, z^{(n)} - 0{,}9 \\ y^{(n+1)} &= -0{,}125\, x^{(n)} + 0{,}125\, z^{(n)} - 0{,}25 \\ z^{(n+1)} &= 0{,}125\, x^{(n)} + 0{,}125\, y^{(n)} + 1{,}125 \end{aligned}}$$

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$z^{(n)}$
0	0	0	0
1	−0,9	−0,25	1,125
2	−0,9875	0,003125	0,98125

$$x^{(2)} = -0{,}1 \cdot y^{(1)} - 0{,}1\, z^{(1)} - 0{,}9$$
$$x^{(2)} = -0{,}1 \cdot (-0{,}25) - 0{,}1 \cdot 1{,}125 - 0{,}9$$
$$x^{(2)} = -0{,}9875$$

5B) PRE SÚSTAVU ROVNÍC S ITERAČNÝM PROCESOM

$$x^{(n+1)} = -0{,}1\, y^{(n)} - 0{,}1\, z^{(n)} - 0{,}9$$
$$y^{(n+1)} = -0{,}125\, x^{(n)} + 0{,}125\, z^{(n)} - 0{,}25$$
$$z^{(n+1)} = 0{,}125\, x^{(n)} + 0{,}125\, y^{(n)} + 1{,}125$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}125 & 0 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}125 & 0 \end{pmatrix}$$

ZO ŠTARTOVACIEHO BODU $[0, 0, 0]$ UROBTE 2 ITERÁCIE A ODHADNITE CHYBU, KTOREJ STE SA DOPUSTILI

ODHAD CHYBY $\rightarrow$ $\|\bar{x}^{(n)} - \bar{x}^*\| \le \dfrac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \cdot \|\bar{x}^{(n)} - \bar{x}^{(n-1)}\| < \varepsilon$

$$\|\alpha\|_r = \max\{0 + 0{,}1 + 0{,}1 ;\ 0{,}125 + 0 + 0{,}125 ;\ 0{,}125 + 0{,}125 + 0\} = \max\{0{,}2 ;\ 0{,}25 ;\ 0{,}25\} =$$
$$= \underline{\underline{0{,}25}}$$

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$z^{(n)}$
0	0	0	0
1	−0,9	−0,25	1,125
2	−0,9875	0,003125	0,98125
$\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\|$	$\lvert -0{,}9875 - (-0{,}9)\rvert = 0{,}0875$	$\lvert 0{,}003125 - (-0{,}25)\rvert = 0{,}253125$	$\lvert 0{,}98125 - 1{,}125\rvert = 0{,}14375$

$$\|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^*\| \le \frac{0{,}25}{1 - 0{,}25} \cdot \|\bar{x}^{(2)} - \bar{x}^{(1)}\| = \frac{0{,}25}{1 - 0{,}25} \cdot 0{,}253125 = \underline{\underline{8{,}4375 \cdot 10^{-2}}}$$

5C) SÚSTAVU ROVNÍC S ITERAČNÝM PROCESOM

$$x^{(n+1)} = -0{,}1 \cdot y^{(n)} - 0{,}1\, z^{(n)} - 0{,}9$$
$$y^{(n+1)} = -0{,}125\, x^{(n)} + 0{,}125\, z^{(n)} - 0{,}25$$
$$z^{(n+1)} = 0{,}125\, x^{(n)} + 0{,}125\, y^{(n)} + 1{,}125$$

RIEŠTE S PRESNOSŤOU $\varepsilon = 10^{-1}$

KEDY KONČÍM VÝPOČET ?

$$\|\bar{x}^{(n)} - \bar{x}^*\| \le \frac{\|\alpha\|}{1 - \|\alpha\|} \|\bar{x}^{(n)} - x^{(n-1)}\| < \varepsilon \Rightarrow \|\bar{x}^{(n)} - x^{(n-1)}\| < \varepsilon \cdot \frac{1 - \|\alpha\|}{\|\alpha\|} = 0{,}1 \cdot \frac{1 - 0{,}25}{0{,}25} = 0{,}3$$

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 & -0{,}1 \\ -0{,}125 & 0 & 0{,}125 \\ 0{,}125 & 0{,}125 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \|\alpha\|_r = \max\{\dots\} = 0{,}25$$

n	$x^{(n)}$	$y^{(n)}$	$z^{(n)}$	$\|\bar{x}^{(n)} - \bar{x}^{(n-1)}\|$
0	−0,9	−0,25	1,125	
1	−0,9875	0,003125	0,98125	$\max\{0{,}0875 ; 0{,}253125 ; 0{,}14375\}$ $< 0{,}3$

$$\bar{x}^* \approx \bar{x}^{(1)} = (-0{,}9875 ;\ 0{,}003125 ;\ 0{,}98125) \pm 10^{-1}$$

6) NEWTONOVOU METÓDOU S PRESNOSŤOU $\varepsilon = 5 \cdot 10^{-2}$ RIEŠTE SÚSTAVU ROVNÍC
$$\ln x - y = 0$$
$$2 - x - y = 0$$
. ZAČNITE V ŠTARTOVACOM BODE $x_0 = 1{,}2$, $y_0 = 0{,}8$

(RIEŠENIE JE V PRÍKLADE 1 Z NEWT. METÓDY PRE RIEŠENIE SÚSTAV NELINEÁRNYCH ROVNÍC)