7A) VYPOČÍTAJTE $\int_{a=x_0=0}^{b=x_n=0{,}5} \sin x^2\,dx$. POUŽITE LICHOBEŽNÍKOVÚ METÓDU S POČTOM KROKOV $n=5$.

$h = \frac{b-a}{n}$

$h = \frac{0{,}5-0}{5} = 0{,}1$

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
$y_i = \sin(x_i)^2$	0	0,009999	0,039989	0,089879	0,159318	0,247404

$\underbrace{0{,}009999 + 0{,}039989 + 0{,}089879 + 0{,}159318}_{0{,}299185}$

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{2}\left[y_0 + y_n + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})\right] =$$

$$= \frac{0{,}1}{2}\left[0 + 0{,}247404 + 2\cdot 0{,}299185\right] = \underline{\underline{0{,}042289}}$$

7B) VYPOČÍTAJTE $\int_0^{0{,}4} \sin x^2\,dx$. POUŽITE SIMPSONOVU METÓDU S POČTOM KROKOV $n=8$.

$h = \frac{b-a}{n} = \frac{0{,}4-0}{8} = 0{,}05$

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x_i	0	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	0,3	0,35	0,4
$y_i = \sin(x_i)^2$	0	0,0025	0,009999	0,022498	0,039989	0,062459	0,089879	0,122194	0,159318

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}\left[y_0 + y_{2i} + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2i-1}) + 2(y_2 + y_4 + \dots y_{2i-2})\right] =$$

$$= \frac{0{,}05}{3}\left[0 + 0{,}159318 + 4\cdot 0{,}209651 + 2\cdot 0{,}139858\right] = \underline{\underline{0{,}021294}}$$

8A) ODHADNITE CHYBU, KTOREJ SA DOPUSTÍTE AK LICHOBEŽNÍKOVOU METÓDOU S POČTOM KROKOV $n=5$ VYPOČÍTATE $\int_0^{0{,}5} \overbrace{\sin x^2}^{f(x)}\,dx$.

$\boxed{|R_L| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2} < \varepsilon$; $M_2 = \max\limits_{\langle a,b\rangle} |f''(x)|$

$f(x) = \sin x^2$

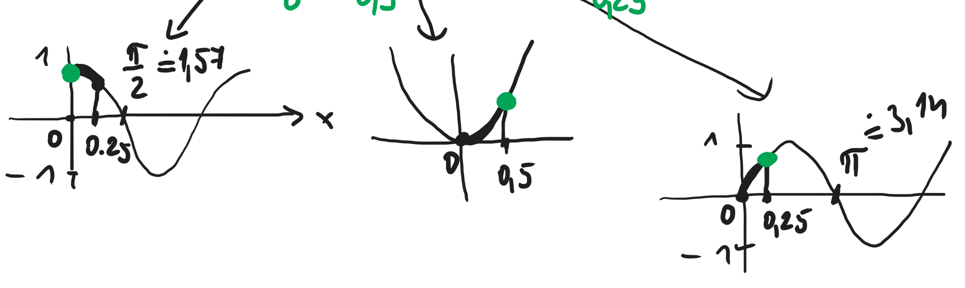
$f'(x) = (\cos x^2)\cdot(2x) = 2x\cdot\cos x^2$

$f''(x) = 2\cdot\cos x^2 + 2x\cdot(-\sin x^2)\cdot(2x) =$

$= 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2$

$M_2 = \max\limits_{\langle 0;0{,}5\rangle} |2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2| \leq |2\cos x^2| + |4x^2\sin x^2| =$

$= 2|\cos \underset{0}{x^2}| + 4\underset{0{,}5}{x^2}|\sin \underset{0{,}25}{x^2}| = 2\cdot 1 + 4\cdot 0{,}25\cdot\sin 0{,}25 \doteq 2{,}2474$



$x \in \langle 0; 0.5\rangle$

$x^2 \in \langle 0; 0.25\rangle$

$|R_L| \leq \frac{(0{,}5-0)^3}{12\cdot 5^2}\cdot 2{,}2474 \doteq \underline{\underline{9{,}36\cdot 10^{-4}}}$

8B) S AKÝM NAJMENŠÍM $\underline{\underline{n}}$ MUSÍTE LICHOBEŽNÍKOVOU METÓDOU POČÍTAŤ $\int_0^{0{,}5} \overbrace{\sin x^2}^{f(x)}\,dx$, ABY STE ZABEZPEČILI PRESNOSŤ $\varepsilon = 10^{-3}$.

$|R_L| \leq \boxed{\frac{(b-a)^3}{12n^2}\cdot M_2 < \varepsilon} \Rightarrow 12n^2\cdot\varepsilon > (b-a)^3\cdot M_2 \Rightarrow n^2 > \frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12\varepsilon} \Rightarrow \boxed{n > \sqrt{\frac{(b-a)^3\cdot M_2}{12\cdot\varepsilon}}}$

$M_2 = \max\limits_{\langle 0;0.5\rangle} |f''(x)| \leq 2|\cos x^2| + 4x^2|\sin x^2| \doteq 2{,}2474$

$f(x) = \sin x^2$

$f'(x) = 2x\cos x^2$

$f''(x) = 2\cos x^2 - 4x^2\sin x^2$

ODVOLÁVKA NA 8A

$n > \sqrt{\frac{(0{,}5-0)^3\cdot 2{,}2474}{12\cdot 10^{-3}}} \doteq 4{,}84 \Rightarrow \underline{\underline{n = 5}}$

8C) ODHADNITE CHYBU, KTOREJ SA DOPUSTÍTE AK SIMPSONOVOU METÓDOU S POČTOM KROKOV $n=6$ VYPOČÍTATE $\int_2^3 \overbrace{\frac{1}{1+x}}^{f(x)}\,dx$.

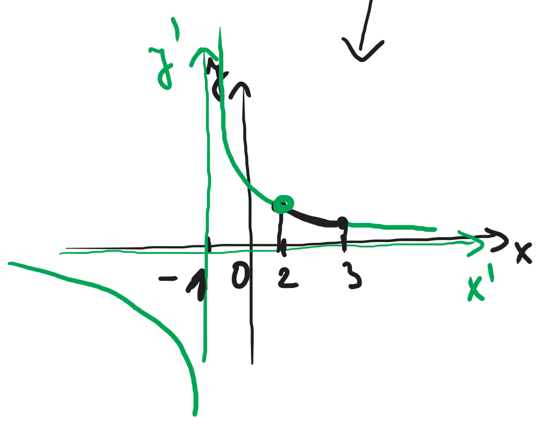
PÁRNE

$\boxed{|R_s| \leq \frac{(b-a)^5}{180\cdot n^4}\cdot M_4} < \varepsilon$

$M_4 = \max\limits_{\langle a,b\rangle} |f^{(IV)}(x)| = \max\limits_{\langle 2,3\rangle} \left|\frac{24}{(1+\underset{2}{x})^5}\right| = \frac{24}{(1+2)^5} = \frac{24}{3^5} = \frac{24}{243}$

$f(x) = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1} \Rightarrow f'(x) = -(1+x)^{-2}\cdot 1 \Rightarrow f''(x) = 2(1+x)^{-3} \Rightarrow f'''(x) = -6(1+x)^{-4} \Rightarrow f^{(IV)}(x) = 24\cdot(1+x)^{-5}$

$\Rightarrow f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$



$|R_s| \leq \frac{(3-2)^5}{180\cdot 6^4}\cdot\frac{24}{243} \doteq \underline{\underline{4{,}23\cdot 10^{-7}}}$

8D) S AKÝM NAJMENŠÍM $\underline{\underline{n}}$ MUSÍTE SIMPSONOVOU METÓDOU POČÍTAŤ $\int_2^3 \overbrace{\frac{1}{1+x}}^{f(x)}\,dx$, ABY STE ZABEZPEČILI PRESNOSŤ $\varepsilon = 10^{-8}$.

$|R_s| \leq \boxed{\frac{(b-a)^5}{180n^4}\cdot M_4 < \varepsilon} \Rightarrow 180n^4\cdot\varepsilon > (b-a)^5\cdot M_4 \Rightarrow \underset{\text{PÁRNE}}{n} > \sqrt[4]{\frac{(b-a)^5\cdot M_4}{180\varepsilon}}$

$M_4 = \max\limits_{\langle a,b\rangle} |f^{(IV)}(x)| = \frac{24}{243}$

$f(x) = \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x) = -(1+x)^{-2} \Rightarrow f''(x) = 2(1+x)^{-3}$; $f'''(x) = -6(1+x)^{-4} \Rightarrow f^{(IV)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$

ODVOLÁVKA NA 8C

$n > \sqrt[4]{\frac{(3-2)^5\cdot\frac{24}{243}}{180\cdot 10^{-8}}} = 15{,}3 \Rightarrow \underline{\underline{n = 16}}$ PÁRNE