

KLASICKÁ DEFINÍCIA PRAVDEPODOBNOTI

DEF. 11: NECH $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ JE KONEČNÁ MNOŽINA ELEMENTÁRNÝCH JAVOV A NECH KAŽDÝ JAV JE ROVNAKO MOŽNÝ. PRE LÚBOVOLNÝ JAV A DEFINUJEME JEHO PRAVDEPODOBNOTÝ TAKTO:

$$P(A) = \frac{m}{n}; \text{ KDE } n - \text{POČET VŠETKÝCH MOŽNÝCH VÝSLEDKOV POKUSU,}$$

m - POČET VŠETKÝCH MOŽNÝCH PRIAZNIVÝCH VÝSLEDKOV JAVU $A = \omega_1 \cup \omega_2 \cup \dots \cup \omega_m$

PRÍKLAD 8: AKÁ JE PRAVDEPODOBNOTÝ, ŽE PRI HODE KOCKOU PADNE PÁRNE ČÍSLO?

A - PRI HODE KOCKOU PADNE PÁRNE ČÍSLO $\Rightarrow A = \omega_2 \cup \omega_4 \cup \omega_6 \Rightarrow m = 3$

$n = 6$ LEBO $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$

PADNE 1

PADNE 5

$A = \{2, 4, 6\}$

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = 0,5 \Rightarrow P(A) = 50\%$$

VETA 1: (ZÁKLADNÉ VLASTNOSTI PRAVDEPODOBNOTI)

NECH JAVY $A, B \in \mathcal{T}$ (SÚ Z JAVOVÉHO POĽA). POTOM

- 1) PRE KAŽDÝ JAV A PLATÍ $0 \leq P(A) \leq 1$,
- 2) PRE ISTÝ JAV PLATÍ $P(\Omega) = 1$,
- 3) PRE NEMOŽNÝ JAV PLATÍ $P(\emptyset) = 0$,
- 4) PRE OPAČNÝ JAV PLATÍ $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$,
- 5) PRE DISJUNKTÍVNE (NEZLUČITEĽNÉ $\approx$ NEMÔŽU NASTAŤ SUČASNE) JAVY PLATÍ $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$,
- 6) AK $A \subset B$, TAK $P(A) \leq P(B)$,
- 7) PRE VŠETKÝ JAVY A, B PLATÍ $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- 8) PRE VŠETKÝ JAVY A, B PLATÍ $P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$

PRÍKLAD 9: AKÁ JE PRAVDEPODOBNOTÝ, ŽE PRI HODE KOCKOU PADNE 7?

A - PADNE 7

$$A = \emptyset \Rightarrow P(\emptyset) = 0$$

NEMOŽNÝ JAV

PRÍKLAD 10: AKÁ JE PRAVDEPODOBNOTÝ, ŽE PRI HODE KOCKOU PADNE 2, ALEBO 5?

$$A - \text{PADNE } 2 \Rightarrow P(A) = \frac{1}{6}$$

$$B - \text{PADNE } 5 \Rightarrow P(B) = \frac{1}{6}$$

$$A, B \text{ SÚ DISJUNKTÍVNE} \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

INAK: A - PADNE 2 $\vee$ 5

$$m = 2 \Rightarrow P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

$$n = 6$$

PRÍKLAD 11: AKÁ JE PRAVDEPODOBNOTÝ, ŽE PRI HODE KOCKOU PADNE 2, ALEBO PÁRNE ČÍSLO.

A - PADNE 2

B - PADNE PÁRNE ČÍSLO $\rightarrow \{2, 4, 6\}$

A, B - NIE SÚ DISJUNKTÍVNE, LEBO MAJÚ SPOLOČNÝ PRIENIK

$A \cap B$ - PADNE 2

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

INAK: A - PADNE 2 $\vee$ PÁRNE ČÍSLO $\Rightarrow \{2, 4, 6\}$

$$m = 3 \Rightarrow P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$n = 6$$

PODMIENENÁ PRAVDEPODOBNOTÝ

DEF. 12: PRAVDEPODOBNOTÝ JAVU A ZA PREDPOKLADU, ŽE NASTAL JAV B

DEFINUJEME TAKTO $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

PRÍKLAD 12: PODĽA ŠTATISTICKÝCH TABULIEK SA VISTEJ KRAJINE ZO

100 000 NARODENÝCH MUŽOV DOŽIJE 10 ROKOV 96 590 A 60 ROKOV SA

DOŽIJE 77 506 MUŽOV. VÝPOČÍTAME PRAVDEPODOBNOTÝ, ŽE SA

10 ROČNÝ CHLAPEC DOŽIJE 60 ROKOV.

A - MUŽ SA DOŽIJE 60 ROKOV

B - MUŽ SA DOŽIL 10 ROKOV

A/B - 10 ROČNÝ CHLAPEC SA DOŽIJE 60 ROKOV

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{77\,506}{100\,000}}{\frac{96\,590}{100\,000}} = \frac{77\,506}{96\,590} \approx 0,8024$$

DEF. 13: AK PRE SYSTÉM JAVOV $M_1, M_2, \dots, M_n$ PLATÍ:

a) JAVY SÚ DISJUNKTÍVNE (ICH PRIENIK JE PRAZDŇA MNOŽINA)

b) ZJEDNOTENIE $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_n = \Omega$ (ÚPLNÝ SYSTÉM), POTOM

JAVY $M_1, \dots, M_n$ NAZÝVAME HYPOTÉZY.

VETA 2: (O ÚPLNEJ PRAVDEPODOBNOTI)

NECH JAVY $M_1, \dots, M_n$ SÚ HYPOTÉZY. POTOM PRE LÚBOVOLNÝ JAV A

PLATÍ $P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)$

PRÍKLAD 13: DVAJA ROBOTNÍCI VYRÁBAJÚ ROVNAKÉ VÝROBKY, PRÍČOM PRVÝ

VYROBÍ ZA PRACOVNÚ SMENU 2 KRÁT VIAC AKO DRUHÝ. PRAVDEPODOBNOTÝ

VYROBENIA NEPODAROKU U PRVÉHO ROBOTNÍKA JE 0,02 A U DRUHÉHO 0,01

ZO SKLADU VÝROBKOV VYBERIEME NÁHODNE 1 VÝROBOK.

AKÁ JE PRAVDEPODOBNOTÝ, ŽE JE TU NEPODAROK?

A - VÝROBOK BUDE NEPODAROK

H_1 - VÝROBOK VYROBIL 1. ROBOTNÍK $\Rightarrow P(H_1) = \frac{2}{3}$

H_2 - VÝROBOK VYROBIL 2. ROBOTNÍK $\Rightarrow P(H_2) = \frac{1}{3}$

A/H_1 - VÝROBOK JE NEPODAROK OD 1. ROBOTNÍKA $\Rightarrow P(A/H_1) = 0,02$

A/H_2 - VÝROBOK JE NEPODAROK OD 2. ROBOTNÍKA $\Rightarrow P(A/H_2) = 0,01$

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)$$

$$P(A) = \frac{2}{3} \cdot 0,02 + \frac{1}{3} \cdot 0,01 \approx 0,0167$$

VETA 3: (BAYESOV VZOREC)

NECH $M_1, \dots, M_n$ SÚ HYPOTÉZY, A JE LÚBOVOLNÝ JAV, KTORÉHO

PRAVDEPODOBNOTÝ JE NIEMUVLOVÁ. POTOM PRE KAŽDÚ HYPOTÉZU

$$PLATÍ \quad P(H_k/A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A/H_k)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + \dots + P(H_n) \cdot P(A/H_n)}$$

PRE $k \in \{1, 2, \dots, n\}$

PRÍKLAD 14: VURČITEZ SPOLOČNOSTI JE 40% MUŽOV A 60% ŽIEN.

VÝSOKÝCH NAD 180 CM JE 35% MUŽOV A 6% ŽIEN. NÁHODNE VYBRANÁ

OSOBA MÁ VÝŠKU NAD 180 CM. AKÁ JE PRAVDEPODOBNOTÝ, ŽE JE

TO ŽENA?

A - VYBRANÁ OSOBA MÁ VÝŠKU NAD 180 CM

H_1 - VYBRANÁ OSOBA JE ŽENA $\Rightarrow P(H_1) = 0,6$

H_2 - VYBRANÁ OSOBA JE MUŽ $\Rightarrow P(H_2) = 0,4$

A/H_1 - OSOBA MÁ NAD 180 CM, JE ŽENA $\Rightarrow P(A/H_1) = 0,06$

A/H_2 - OSOBA MÁ NAD 180 CM, JE MUŽ $\Rightarrow P(A/H_2) = 0,35$

$$P(H_1/A) = \frac{P(H_1) \cdot P(A/H_1)}{P(H_1) \cdot P(A/H_1) + P(H_2) \cdot P(A/H_2)} = \frac{0,6 \cdot 0,06}{0,6 \cdot 0,06 + 0,4 \cdot 0,35} \approx 0,2045$$

PRETOŽE HYPOTÉZY TVORIA ÚPLNÝ SYSTÉM JAVOV, PRAVDEPODOBNOTÝ

ŽE VYBRANÁ OSOBA JE MUŽ, TVORÍ OPAČNÝ JAV K JAVU, ŽE

VYBRANÁ OSOBA JE ŽENA.

$$P(H_2/A) = 1 - P(H_1/A) = 1 - 0,2045 = 0,7955$$