# TEÓRIA PRAVDEPODOBNOSTI

**Princíp násobenia**

Ak činnosť pozostáva z $k$ krokov po sebe nasledujúcich a
prvý krok môže byť uskutočnený $n_1$ spôsobmi,
druhý krok môže byť uskutočnený $n_2$ spôsobmi,
$\vdots$
$k$-ty krok môže byť uskutočnený $n_k$ spôsobmi,
tak počet rôznych spôsobov vykonania činnosti je $n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$.

**Princíp sčítania**

Majme množiny $A_1, A_2, \ldots, A_k$, ktoré sú po dvojiciach disjunktné. Nech $|A_i| = n_i$.
Potom $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

# Permutácie

Nech $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$. Definujeme $n$-faktoriál a a kombinačné číslo nasledovne:

$$0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n!$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}.$$

Špeciálne platí

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

Permutácie sú usporiadané $n$-tice prvkov $n$-prvkovej množiny. Ak sú všetky prvky navzájom rôzne, jedná sa o permutácie bez opakovania. Ak sú niektoré prvky množiny rovnaké, jedná sa o permutácie s opakovaním.
Počet permutácií $n$-tej triedy bez opakovania je

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Počet permutácií $n$-tej triedy s opakovaním je

$$P'_{n_1, n_2, \ldots, n_c}(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_c!} \qquad (n_1 + n_2 + \cdots + n_c = n)$$

## Príklad

*Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť tanečné páry z 8 chlapcov and 8 dievčat?*

Predstavme si, že chlapci sú zoradení. Počet možností, ako vytvoriť páry sa rovná počtu permutácií z 8 dievčat, teda

$$P(8) = 8! = 40320.$$

## Príklad

*1 Koľko slov (aj neplnovýznamových) môžeme vytvoriť zámenou poradia písmen v slove MATEMATIKA?*

Jedná sa o permutácie z 10 prvkov (písmen) s opakovaním. Máme $n_1 = 2$ (písmeno M sa vyskytuje dvakrát), $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = n_6 = 1$. Dostávame

$$V_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1! \cdot 1!} = 151200.$$

# Variácie

Variácie sú usporiadané $k$-tice z $n$ navzájom rôznych prvkov. Rozoznávame variácie bez opakovania a variácie s opakovaním.
Počet variácií $k$-tej triedy z $n$ prvkov $(k \leq n)$ je

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

V prípade $n = k$ dostávame permutácie.

Počet variácií $k$-tej triedy z $n$ prvkov s opakovaním je

$$V'(n,k) = n^k.$$

Pri variáciách s opakovaním môže byť $k > n$.

## Príklad

*V košíku je banán, jablko a pomaranč. Päť dievčat má chuť na ovocie. Koľkými spôsobmi môžeme dať trom dievčatám po 1 kuse ovocia a dvom nedať žiadne?*

Záleží na tom, ktoré ovocie bude ktorému dievčaťu „priradené“, teda záleží na poradí. Zoberieme banán a dáme ho jednému z 5 dievčat. Môžeme ho vybrať 5 spôsobmi. Jablko dáme ho jednému zo 4 dievčat, čo môžeme urobiť 4 spôsobmi. Pomaranč dáme jednému z 3 dievčat. Máme teda $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.
Pri použitím variácií vytvárame usporiadané trojice z piatich rôznych prvkov, teda $n = 5$, $k = 3$. Podľa (1) dostávame $V(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

## Príklad

*Koľko podmnožín má 5-prvková množina?*

Označme množinu ako $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Každej podmnožine môžeme priradiť usporiadanú päticu z núl a jednotiek a to tak, že na $i$-tej pozícii je 1, ak prvok $a_i$ do tejto podmnožiny patrí a 0, ak prvok $a_i$ do tejto podmnožiny nepatrí. Potom počet všetkých podmnožín sa rovná počtu usporiadaných pätíc z dvoch prvkov. Jedná sa teda o variácie s opakovaním, pričom $n = 2$, $k = 5$. Dostávame $V'(2,5) = 2^5 = 32.$

# Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru. Počet prvkov súboru označíme $n$ a počet prvkov podmnožiny označíme $k$. Počet kombinácií z $n$ prvkov $k$-tej triedy $(k \leq n)$ je

$$C(n,k) = \binom{n}{k}.$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n,n) = 1$.

## Príklad

*V dielni pracuje 15 mužov a 12 žien. Koľkými spôsobmi možno vybrať 7 zamestnancov dielne na rekreáciu, ak majú ísť 4 muži a 3 ženy?*

Pri výbere mužov vyberáme 4 prvky z 15 prvkov, jedná sa o kombinácie bez opakovania. Počet možností je $C(15,4) = \binom{15}{4}$. Obdobne pri výbere žien máme $C(12,3) = \binom{12}{3}$ možností. Z princípu násobenia vyplýva, že počet spôsobov výberu rekreantov je $\binom{15}{4} \cdot \binom{12}{3} = 300300$.

## Pokus a jav

Nech je pevne stanovený istý systém podmienok, napr. majme pravidelnú hraciu kocku, ktorej steny sú označené číslami 1, 2, ..., 6. Proces, ktorý môže nastať pri realizácii týchto podmienok, napr. hod touto hracou kockou, nazývame pokusom. Tu vyžadujeme, aby každý pokus mal tzv. vlastnosť hromadnosti, t. j. aby sme ho mohli za tých istých podmienok teoreticky ľubovoľnekrát opakovať.
Výsledok pokusu je jav. Pri hode kockou môže byť javom napr. padnutie šestky, padnutie nepárneho čísla, padnutie čísla väčšieho ako 4,...
Z pohľadu možného nastatia delíme javy do troch základných skupín:

1. javy isté sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu vždy nastanú (napr. padnutie čísla menšieho než 10);
2. javy nemožné sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu nikdy nenastanú (napr. padnutie čísla 10);
3. javy náhodné sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu môžu, ale nemusia nastať (napr. padnutie párneho čísla).

Javy budeme označovať veľkými písmenami $A$, $B$, $C$, ..., istému javu vyhradíme písmeno $I$ a nemožnému javu znak $\emptyset$.

# Základné poznatky o javoch

## Definícia

- Jav $A$ nazývame podjavom javu $B$ práve vtedy, keď z nastatia javu $A$ vyplýva nastatie javu $B$. Zapisujeme $A \subset B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)
- Javy $A$ a $B$ nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subset B$ a súčasne $B \subset A$. Zapisujeme $A = B$.
- Opačným javom k javu $A$ nazývame jav, ktorý nastane práve vtedy, keď nenastane jav $A$. Označujeme $\overline{A}$.
- Jav $C$ nazývame prienikom javov $A$ a $B$ práve vtedy, keď nastane len za súčasného nastatia oboch javov $A$ a $B$. Zapisujeme $C = A \cap B$.
- Jav $C$ nazývame zjednotením javov $A$ a $B$ práve vtedy, keď nastane len za predpokladu, že nastal aspoň jeden z javov $A$ a $B$. Zapisujeme $C = A \cup B$.

# Vlastnosti javov a operácií s javmi

Nech $A$, $B$, $C$ sú ľubovoľné javy. Platí:

1. $A \subset A, \quad \emptyset \subset A, \quad A \subset I$;
2. ak $A \subset B$ a $B \subset C$, tak $A \subset C$;
3. $\bar{I} = \emptyset$, $\bar{\emptyset} = I$, $\overline{(\overline{A})} = A$;
4. $\overline{A} \cap A = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap I = A$, $A \cap B \subset A$;
5. $\overline{A} \cup A = I$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup I = I$, $A \subset A \cup B$;
6. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$;
7. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$;
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
10. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morganove pravidlá).

## Príklad

*Nech jav $A$ spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav $B$ znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:*
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav $A$ nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav $B$ nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$.

- jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{2, 4, 5, 6\}$;
- jav $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{4, 6\}$;
- jav $\overline{B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3\}$;
- jav $\overline{A \cap B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3, 5\}$.

## Definícia

Javy $A$ a $B$ nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) práve vtedy, keď nemôžu súčasne nastať, t. j. keď $A \cap B = \emptyset$. Javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) javmi práve vtedy, keď sú po dvojiciach disjunktné t. j. keď $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

## Definícia

Systém $H_1, H_2, \ldots, H_n$ je úplný disjunktný systém javov, ak platí

- $H_i \cap H_j = \emptyset \quad$ pre každé $i \neq j, \quad i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = I$.

Takýto systém javov často nazývame hypotézy.

## Príklad

*Pre pokus „hod kockou" je príkladom hypotéz množina javov*

$$H_1 = \{1, 6, 5\}, \ H_2 = \{3, 4\}, H_3 = \{2\}.$$

*Množina javov* $H_1 = \{1, 6, 5\}, \ H_2 = \{2, 3, 4\}, H_3 = \{2\}$ *netvorí hypotézy, lebo* $H_2 \cap H_3 = \{2\} \neq \emptyset$.
*Množina javov* $H_1 = \{1, 6\}, \ H_2 = \{3, 4\}, H_3 = \{2\}$ *netvorí hypotézy, lebo* $H_1 \cup H_2 \cup H_3 = \{1, 2, 3, 4, 6\} \neq I$.

# Elementárne a zložené javy

## Definícia

Jav $A$ nazývame zloženým javom práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch javov $A_1$ a $A_2$, ktoré sa nerovnajú nemožnému javu ani javu $A$.

Pre zložený jav $A$ teda platí: $A = A_1 \cup A_2$, pričom $A \neq A_1 \neq \emptyset$ a $A \neq A_2 \neq \emptyset$.
Hovoríme, že jav $A$ je rozložený na javy $A_1$ a $A_2$.
Príkladom zloženého javu je napr. padnutie nepárneho čísla na kocke.

## Definícia

Každý jav $E$, ktorý nie je zložený nazývame elementárnym javom.

Základné vlastnosti elementárnych javov:

1. Jav $E$ je elementárny práve vtedy, keď neexistuje taký jav $A \neq \emptyset$, že $A \subset E$.
2. Ku každému zloženému javu $A$ existuje taký elementárny jav $E$, že $E \subset A$.
3. Ľubovoľné dva rôzne elementárne javy sú disjunktné.
4. Každému zloženému javu $A$ môžeme jednoznačne priradiť takú množinu elementárnych javov (táto množina nemusí byť konečná), že jav $A$ je zjednotením týchto elementárnych javov.

# Javové pole

## Definícia

*Nech* $\gamma = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ *je ľubovoľná množina elementárnych javov. Pod javovým poľom nad* $\gamma$ *rozumieme taký systém* $\tau$ *podmnožín množiny* $\gamma$*, pre ktorý platí:*

1. $\emptyset \in \tau$;
2. *ak* $A$, $B \in \tau$, *tak* $A \cap B \in \tau$, $A \cup B \in \tau$ *a* $\overline{A} \in \tau$;
3. *pre každú postupnosť* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \tau$ *je* $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$ *a* $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$.

*Prvky javového poľa nazývame javmi.*

# Pojem pravdepodobnosti javu

## Definícia (Klasická definícia pravdepodobnosti)

Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ je konečná množina elementárnych javov a nech každý elementárny jav je **„rovnako možný (očakávaný)"**. Pre ľubovoľný jav $A \in \tau$ definujeme jeho pravdepodobnosť predpisom

$$P(A) = \frac{m}{n},$$

kde $m$ je počet rôznych elementárnych javov, na ktoré sa jav $A$ rozkladá, t. j.

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \cdots \cup E_{i_m}.$$

Rovnosť (1) môžeme interpretovať aj takto:

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}.$$

# Základné vlastnosti pravdepodobnosti

## Veta

1. *Pre každý jav* $A \in \tau$ *je* $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. *Pre istý a nemožný jav je* $P(I) = 1$ *a* $P(\emptyset) = 0$.
3. *ak* $A \subset B$, *tak* $P(A) \leq P(B)$.
4. *Pre opačný jav platí* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. *Pre disjunktné javy: ak* $A \cap B = \emptyset$, *tak* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. *pre ľubovoľné javy* $A, B$ *je* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
7. *pre ľubovoľné javy* $A, B, C$ *je*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$-[P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C);$$

## Príklad

*Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 3 hodoch mincou padne dvakrát hlava a raz znak.*

**Riešenie.** Množina elementárnych javov pozostáva z 8 javov:

$$\gamma = \{ZZZ, ZZH, ZHZ, ZHH, HZZ, HZH, HHZ, HHH\}$$

Jav „padnutie dvoch hláv a jedného znaku“ pozostáva z nasledujúcich elementárnych javov: $A = \{HHZ, HZH, ZHH\}$.
Teda $m = 3$, $n = 8$. Pravdepodobnosť javu $A$ je $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$.

## Príklad

*V študijnej skupine je 17 chlapcov a 13 dievčat. Na skúške 4 chlapci a 5 dievčat získalo ohodnotenie „A“. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný študent je dievča alebo študent, ktorý získal na skúške „A“?*

**Riešenie.** Nech $A$ je udalosť, že vybraný študent získal ohodnotenie „A“ and $B$ je udalosť, že vybraný študent je dievča. Chceme vypočítať $P(A \cup B)$. Dostávame

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{30} + \frac{13}{30} - \frac{5}{30} = \frac{17}{30}.$$

## Príklad

*Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri hode 2 kockami padne súčet*
*a) rovný 1,*
*b) rovný 4,*
*c) menší ako 13.*

**Riešenie.** Množina elementárnych javov pozostáva z usporiadaných dvojíc z prvkov $1, 2, \ldots, 6$, teda $n = 36$.

a) Nech $A$ je jav „súčet je 1". Súčet hodnôt na 2 kockách nemôže byť rovný 1, jav $A$ je jav nemožný. Teda $P(A) = 0$.

b) Nech $B$ je jav „súčet je 4". Máme $B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, teda $m = 3$, $n = 36$. Potom $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

c) Nech $C$ je jav „súčet je menší ako 13". Jav $C$ pozostáva zo všetkých elementárnych javov, je to istý jav. Teda $P(C) = 1$.

# Axiomatická definícia pravdepodobnosti

## Definícia (Axiomatická definícia pravdepodobnosti)

Nech $\gamma$ je množina elementárnych javov a nech $\tau$ je javové pole nad $\gamma$ (t. j. $\tau$ je množina javov). Nech sú splnené tieto tri axiómy:

$A_1$: každému javu $A \in \tau$ je priradené práve jedno nezáporné číslo $P(A)$, ktoré nazývame **pravdepodobnosťou javu $A$**;

$A_2$: $P(I) = 1$;

$A_3$: pre ľubovoľný systém disjunktných javov $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \tau$ platí

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n). \tag{1}$$

Usporiadanú trojicu $[\gamma, \tau, P]$ nazývame **pravdepodobnostné pole**.

# Podmienená pravdepodobnosť a veta o úplnej pravdepodobnosti

Za istých okolností je užitočné skúmať pravdepodobnosť javu $A$ za predpokladu, že vieme o tom, že nastal jav $B$. Túto pravdepodobnosť budeme označovať $P(A|B)$ a čítať **pravdepodobnosť javu $A$ za predpokladu, že nastal jav $B$**.

## Definícia (Podmienená pravdepodobnosť)

*Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole.* **Pravdepodobnosť javu $A$ za predpokladu, že nastal jav $B$** *definujeme takto:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

## Veta

*Ak $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, tak pre javy $A_i \in \tau$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí*

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

## Príklad

*Zo štatistického prieskumu vyplýva, že z 100000 živo narodených mužov sa dožije desiatich rokov 96600 mužov a šesťdesiatich rokov 77500 mužov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že ak sa muž dožije desiatich rokov, tak sa dožije 60 rokov.*

**Riešenie.** Nech $B$ je jav, ktorý spočíva v tom, že muž sa dožije desiatich rokov a nech $A$ je jav, že muž dožije šesťdesiatich rokov. Chceme určiť pravdepodobnosť toho, že nastal jav $A$ za predpokladu, že nastal jav $B$, t. j. $P(A|B)$. V našom prípade platí, že $A \subset B$ a teda $A \cap B = A$.

Zo zadania máme $P(A) = \frac{77500}{10000} = 0,775$, $P(B) = \frac{96600}{10000} = 0,966$. Dostávame

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)}{P(B)} = \frac{0,775}{0,966} = 0,8023.$$

## Príklad

*Predpokladajme, že bolo zmiešaných päť dobrých poistiek a dve chybné poistky. Aby sme našli chybné poistky, testujeme ich jed po druhom, náhodne a bez výmeny. Aká je pravdepodobnosť, že budeme mať šťastie a nájdeme obe chybné poistky v prvých dvoch testoch?*

**Riešenie**. Nechajte $A$ je udalosť, že nájdeme chybnú poistku v prvom teste a $B$ a $B$ je udalosť, že nájdeme chybnú poistku v druhom teste. Vieme, že $P(A) = \frac{2}{7}$ a $P(B|A) = 1/6$. Chceme vypočítať $P(A \cap B)$. Dostávame

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21} = 0,047619.$$

## Veta (Veta o úplnej pravdepodobnosti)

*Nech $H_1$, $H_2$, ..., $H_n$ sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav $A$ platí*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

**Dôkaz.** Pre jav $A$ máme:

$$A = A \cap I = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \cdots \cup (A \cap H_n).$$

Keďže javy $H_i$ sú disjunktné a $(A \cap H_i) \subset H_i$, tak aj javy $(A \cap H_1)$, $(A \cap H_2)$, ..., $(A \cap H_n)$ sú disjunktné a podľa tretej axiómy definície pravdepodobnosti je

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

## Príklad

*Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába* 70% *kvalitných výrobkov, druhý* 80% *kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok je kvalitný.*

**Riešenie.** Označme javy nasledovne:
$H_1$ – výrobok je vyrobený prvým automatom;
$H_2$ – výrobok je vyrobený druhým automatom;
$A$ – výrobok je kvalitný.
Počet výrobkov vyrobených automatmi je v pomere 3:1, teda 1. automat vyrobí $\frac{3}{4}$ z celkového počtu výrobkov a 2. automat $\frac{1}{4}$ z celkového počtu výrobkov. Odtiaľ $P(H_1) = \frac{3}{4} = 0,75$, $P(H_2) = \frac{1}{4} = 0,25$. Výrobok je kvalitný, ak ho vyrobil 1. automat, s pravdepodobnosťou 0,7. Teda $P(A|H_1) = 0,7$. Podobne $P(A|H_2) = 0,8$. Podľa vety o úplnej pravdepodovnosti dostávame

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,75 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,725.$$

## Príklad

*Z balíčka 52 žolíkových kariet niekto zobral dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná karta vytiahnutá z balíčka s 50 kartami je piková karta?*

**Riešenie.** Nech $H_i$ je jav, že chýba $i$ pikových kariet, $i = 0, 1, 2$. Nech $A$ je jav, že náhodne vylosovaná karta je piková karta. Chceme vypočítať $P(A)$. Máme

$$P(H_0) = \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}}.$$

Podmienené pravdepodobnosti sú

$$P(A|H_0) = \frac{13}{50}, \qquad P(A|H_1) = \frac{12}{50}, \qquad P(A|H_2) = \frac{11}{50}.$$

Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame

$$P(A) = P(A|H_0) \cdot P(H_0) + P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) =$$

$$= \frac{13}{50} \cdot \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{12}{50} \cdot \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}} + \frac{11}{50} \cdot \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{4}.$$

# Bayesov vzorec

## Veta

*Nech javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu $H_k$ je*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}.$$

*Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.*

## Príklad

*Urna 1 obsahuje 5 bielych guľôčok a 7 čierne guľôčky. Urna 2 obsahuje 3 biele a 12 čiernych guľôčok. Hodíme mincou a ak padne hlava, vyberieme guľôčku z urny 1, a ak je to znak, vyberieme guľôčku z urny 2. Dozvedeli sme sa, že bola vybraná biela guľôčka. Aká je pravdepodobnosť, že to bola guľôčka vybratá z urny 2?*

**Riešenie.** Nech $H_1$ je jav, že padla hlava a $H_2$ je jav, že padol znak. Nech $A$ je jav, že bola vybraná biela guľôčka. Zo zadania vyplýva, že $P(A|H_1) = \frac{5}{12}$ a $P(A|H_2) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Vieme, že $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Chceme vypočítať $P(H_2|A)$. Z Bayesovho vzorca dostávame $P(H_2|A) = \frac{(1/5)\cdot(1/2)}{(1/5)\cdot(1/2)+(5/12)\cdot(1/2)} = \frac{12}{37}$.

# Nezávislé javy

## Definícia

*Dva javy $A$ a $B$ nazývame* **(vzájomne) nezávislými** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť jedného z nich sa nemení, ak nastane druhý jav alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová, t. j. nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:*

$$P(A|B) = P(A) \quad \vee \quad P(B) = 0 \quad \vee \quad P(B|A) = P(B) \quad \vee \quad P(A) = 0.$$

## Veta

*Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Javy $A, B \in \tau$ sú nezávislé práve vtedy, keď*

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B).$$

Z nezávislosti javov $A$ a $B$ vyplýva aj nezávislosť týchto dvojíc javov:

$$\overline{A} \text{ a } B, \qquad A \text{ a } \overline{B}, \qquad \overline{A} \text{ a } \overline{B}.$$

# Celkove nezávislé javy

## Definícia

*Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, nazývame* **celkove nezávislým** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť, že nastane ľubovoľný z nich sa nemení, ak nastanú ľubovoľné z ostatných javov alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová.*

## Veta (Pravdepodobnosť prieniku celkove nezávislých javov)

*Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$, $n \geq 2$, je celkove nezávislým, tak pre každé $k \leq n$ platí*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n).$$

## Veta (Pravdepodobnosť zjednotenia celkove nezávislých javov)

*Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov $A_1$, $A_2$, $\ldots$, $A_n$, $n \geq 2$, je celkove nezávislým, tak*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A}_n).$$

## Príklad

*Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že*

a) *všetci štyria trafia do koša,*

b) *ani jeden netrafí do koša,*

c) *aspoň jeden trafí do koša,*

d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

**Riešenie.** Označme $A_i$ jav, že $i$-tý basketbalista trafí do koša. Máme

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,7, \quad P(A_3) = 0,85, \quad P(A_4) = 0,9.$$

Teda

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,9 = 0,4284$

b) $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,1 = 0,0009$

c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,9991$

d) $P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \overline{A}_4) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,5716$

# Opakované nezávislé pokusy

Nech výsledkom nejakého pokusu je jav $A$. Opakujme za tých istých podmienok pokus $n$-krát, pričom predpokladáme, že tieto pokusy sú nezávislé, t. j. sú také, že výsledok každého z nich nemá vplyv na výsledok žiadneho predchádzajúceho pokusu a ani na výsledok žiadneho nasledujúceho pokusu. Inak povedané, pravdepodobnosť, že nastane jav $A$, je v každom pokuse rovnaká.

## Veta (Bernoulliho veta)

*Nech p je pravdepodobnosť toho, že pri danom pokuse nastane jav A a $P_{n,p}(k)$ je pravdepodobnosť toho, že pri n-násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve k-krát. Potom platí tzv.* **Bernoulliho vzorec**:

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}.$$

## Príklad

*Predpokladajme, že hodíme dve kocky 8 krát. Aká je pravdepodobnosť, že najviac trikrát bude súčet hodnôt na kockách rovný 7?*

**Riešenie.** Súčet 7 môžeme hodiť 6 spôsobmi:

$$(1,6),\ (2,5), (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1).$$

Je 36 možností padnutia dvojice čísel na kockách, teda $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Máme $n = 8,\ k = 0, 1, 2, 3$ a podľa Bernoulliho vzorca dostávame

$$P(A) = P_{8,\frac{1}{6}}(0)+P_{8,\frac{1}{6}}(1)+P_{8,\frac{1}{6}}(2)+P_{8,\frac{1}{6}}(3) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^8 + \binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^7$$

$$+\binom{8}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^6 + \binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,96934.$$

# Pojem náhodnej premennej

Pod **náhodnou premennou** budeme rozumieť takú premennú, ktorá svoje hodnoty nadobúda náhodne.
Príklady náhodnej premennej:

1. Súčet bodov hodených napr. na troch bežných hracích kockách (možné hodnoty: $3, 4, \ldots, 18$);
2. počet bodov, ktoré študent získa z písomky,
3. počet úspešných hodov do basketbalového koša,
4. počet výtlkov na ceste z Košíc do Prešova,
5. doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
6. výška dospelého muža,
7. polčas rozpadu rádioaktívnej látky (nadobúda hodnoty z určitého intervalu).

Náhodné premenné delíme na

- **diskrétne, (1, 2, 3, 4)**
- **spojité. (5 ,6, 7)**

# Definícia náhodnej premennej

## Definícia

Pod **náhodnou premennou** rozumieme každé zobrazenie $X : \gamma \to \mathbb{R}$, kde $\gamma$ je množina elementárnych javov a $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Pre každý elementárny jav $E$ je zrejme $X(E)$ nejaké reálne číslo, ktoré nazývame **hodnotou náhodnej premennej pre elementárny jav $E$** alebo skrátene **hodnotou náhodnej premennej**.

Náhodná premenná priradí každému elementárnemu javu nejaké reálne číslo.
Každému javu $A$ priradí číselnú množinu tvorenú číslami, ktoré sú priradené elemen. javom, na ktoré sa jav $A$ rozkladá.
Náhodné premenné – $X$, $Y$, $X_1$, $X_2$, ...
Hodnoty náhodných premenných – $x$, $y$, $x_1$, $x_2$, ....
Budeme predpokladať, že pre každé $a \in \mathbb{R}$ vieme určiť pravdepodobnosti typu:

1. $P(X = a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnota náhodnej premennej $X$ je rovná číslu $a$;
2. $P(X \leq a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnoty náhodnej premennej $X$ sú menšie alebo roxné ako číslo $a$;
3. $P(X \in I)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná $X$ nadobúda hodnoty z intervalu $I$.

# Distribučná funkcia náhodnej premennej

## Definícia

**Distribučná funkcia** $F$ **náhodnej premennej** $X$ je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{2}$$

## Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;
3. $F$ *je neklesajúca funkcia, t. j. pre každé* $a < b$ *je* $F(a) \leq F(b)$;
4. $F$ *je sprava spojitá pre diskrétnu náhodnú premennú a spojitá pre spojitú náhodnú premennú na celej množine reálnych čísel;*
5. *ak* $a < b$, *tak*

$$P(X \in (a,\, b\rangle) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \tag{3}$$

# Diskrétna náhodná premenná

## Definícia (Rozdelenie diskrétneho typu)

Náhodná premenná $X$ má **rozdelenie diskrétneho typu**, ak existuje konečná alebo spočítateľná množina reálnych čísel $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ taká, že pre každé $x_i \in \mathcal{H}(X)$ je daná pravdepodobnosť $P(X = x_i) = p_i$ a platí $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$. Množinu $\mathcal{H}(X)$ nazývame **obor hodnôt** náhodnej premennej $X$.

Náhodnú premennú $X$, pre ktorú je $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, môžeme popísať tabuľkou:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline P(X = x_i) = p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}, \tag{4}$$

ktorú nazývame **pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej $X$**.
Iný spôsob zadania je **pravdepodobnostnou funkciou**

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{ak } x = x_i \in \mathcal{H}(X); \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{5}$$

# Modus a stredná hodnota náhodnej premennej

## Definícia

**Modus diskrétnej náhodnej premennej $X$** je najpravdepodobnejšia hodnota tejto náhodnej premennej. Označujeme $\mathcal{M}o(X)$.

$\mathcal{M}o(X)$ sa môže rovnať viacprvkovej množine. V krajnom prípade $\mathcal{M}o(X) = \mathcal{H}(X)$, ak je pravdepodobnosť rovnaká pre všetky hodnoty $x_i \in \mathcal{H}(X)$.

## Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej $X$. Pod **strednou hodnotou náhodnej premennej $X$** rozumieme číslo $E(X)$, ktoré je definované pre diskrétnu náhodnú premennú vzťahom

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i.$$

# Disperzia

## Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej $X$, ktorej stredná hodnota je $E(X)$. Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej** $X$ rozumieme číslo $D(X)$ (ak existuje), ktoré je definované takto

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej** $X$ rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{6}$$

# Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

## Veta

*Nech $X$ je náhodná premenná a nech $a$ a $b$ sú ľubovoľné konštanty. Potom*

1. *ak $X = a$ je konštantná náhodná premenná, tak $E(X) = a$ a $D(X) = 0$;*
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;
5. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$, *kde* $E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \cdot p_i$.

**Dôkaz.** Dokážeme tvrdenie **5**:

$$D(X) = E[(X - E(X))^2] = E[X^2 - 2 \cdot X \cdot E(X) + (E(X))^2] =$$
$$E(X^2) + E[-2 \cdot X \cdot E(X)] + E[(E(X))^2] = E(X^2) - 2 \cdot E(X) \cdot E(X) + [E(X)]^2 =$$
$$E(X^2) - [E(X)]^2,$$

## Príklad

*Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej $X$ so strednou hodnotou 3,7 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou*

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | $x_5$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p_i$ | 0,1 | $p_2$ | 0,3 | 0,35 | 0,2 |

*. Určte:*

a) *neznáme hodnoty $x_5$ a $p_2$;*

b) *disperziu a modus náhodnej premennej $X$;*

c) $P(X \geq 5)$ *a* $P(E(X) < X \leq 7)$;

**Riešenie.**

a) Hodnotu $p_2$ určíme zo vzťahu $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.
Teda: $0,1 + p_1 + 0,3 + 0,35 + 0,2 = 1$, odtiaľ $p_2 = 0,05$.
Pre určenie hodnoty $x_5$ dosadíme do vzorca pre strednú hodnotu, ktorá je daná. Dostávame

$$1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,35 + 0,2 \cdot x_5 = 3,7 \Rightarrow x_5 = 6.$$

b) $D(X) = \sum_{i=1}^{5}(x_i - E(X))^2 p_i = (1-3,7)^2 \cdot 0,1 + (2-3,7)^2 \cdot 0,05$
$+(3-3,7)^2 \cdot 0,3 + (4-3,7)^2 \cdot 0,35 + (6-3,7)^2 \cdot 0,2 = 2,11.$
Modus je najpravdepodobnejšia hodnota, teda $\mathcal{M}o(X) = 4$.

c) $P(X \geq 5) = P(X = 6) = 0,2$;
$P(E(X) < X \leq 7) = P(3,7 < X \leq 7) = P(X = 4) + P(X = 6) = 0,55.$

## Príklad

*Hádžeme dvoma kockami. Nech $X$ je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu maxima z hodených hodnôt. Určte:*

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej $X$ (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *distribučnú funkciu $F(x)$;*

c) $P(X < 4)$, $P(X \geq 3)$, $P(2 < X \leq 5)$,

d) *strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.*

**Riešenie.** a) Maximum hodených hodnôt môže byť 1,2,3,4,5 alebo 6. Teda $\mathcal{H}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pre každú hodnotu z množiny $\mathcal{H}(X)$ vypočítame pravdepodobnosť, s ktorou je daná hodnota dosiahnutá.
Pre výpočet $P(X = 1)$ si treba uvedomiť, že maximum sa rovná 1 len v prípade, že na obidvoch kockách hodíme číslo 1, teda $m = 1$, $n = 36$. Odtiaľ $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.
$P(X = 2) = \frac{3}{36}$, lebo maximum je rovné 2 pre dvojice (1,2), (2,1), (2,2).
Rovnakým spôsobom vypočítame zvyšné pravdepodobnosti. Výsledok zapíšeme do tabuľky

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i) = p_i$ | $\frac{1}{36}$ | $\frac{3}{36}$ | $\frac{5}{36}$ | $\frac{7}{36}$ | $\frac{9}{36}$ | $\frac{11}{36}$ |

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;
$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$;
alebo inak podľa (3):
$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{25}{36} - \frac{4}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$;

$D(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{1}{36} + (2 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{3}{36} + (3 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{5}{36} +$
$(4 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{7}{36} + (5 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{9}{36} + (6 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{2555}{1296}$.

Inak môžeme $D(X)$ vypočítať podľa vzťahu $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
Vypočítame
$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 16 \cdot \frac{7}{36} + 25 \cdot \frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$ a dosadíme
$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{791}{36} - (\frac{161}{36})^2 = \frac{2555}{1296}$

# Rozdelenia pravdepodobnosti diskrétnych náhodných premenných

## Binomické rozdelenie pravdepodobnosti

**Vstupy**: Prirodzené číslo $n$ a reálne číslo $p \in (0, 1)$.

### Definícia

*Náhodná premenná $X$ má* **binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami $n$ a $p$** *práve vtedy, keď*
*1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$;*
*2.*

$$f(x) = P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}. \qquad (7)$$

*Používame pritom označenie $X \sim bino(n; p)$.*

### Veta

*Ak $X \sim bino(n; p)$, tak*

$$E(X) = n \cdot p, \qquad D(X) = n \cdot p \cdot q \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{kde } q = 1 - p. \quad (8)$$

## Príklad

*Predpokladajme, že hádžeme kockou. Vykonáme 4 hody. Nech $X$ je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme číslo väčšie ako 4.*

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej $X$ (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej $X$.*

**Riešenie.** a) Pravdepodobnosť, že pri hode kockou hodíme číslo väčšie ako 4, je $p = \frac{1}{3}$. Jedná sa o opakované nezávislé pokusy, náh. prem. $X$ má binomické rozdelenie, teda $X \sim bino(4; \frac{1}{3})$. Máme $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vypočítame všetky pravdepodobnosti:

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot (\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$; $P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot (\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^3 = \frac{32}{81}$;
$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 = \frac{24}{81}$; $P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{2}{3})^1 = \frac{8}{81}$;
$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{81}$.

Výsledky zapíšeme do tabuľky:

| $x_i$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $P(X = x_i) = p_i$ | $\frac{16}{81}$ | $\frac{32}{81}$ | $\frac{24}{81}$ | $\frac{8}{81}$ | $\frac{1}{81}$ |

b) $E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

**Poznámka.** Môžete si overiť, že rovnaké hodnoty dostaneme aj použitím všeobecných vzorcov pre $E(X)$ a $D(X)$.

# Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Toto rozdelenie pravdepodobnosti môže byť charakterizované modelom, v ktorom je daná množina objektov $M$, pričom $K$ objektov má určitú vlastnosť a $M - K$ objektov nemá túto vlastnosť. Z tejto množiny vyberieme bez vrátenia $N$ objektov. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že medzi vybratými objektmi je $x$ takých, ktoré majú túto vlastnosť.

## Definícia

*Náhodná premenná $X$ má* **hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami** $M$, $K$ **a** $N$ *práve vtedy, keď*

*1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{\max\{0, K - M + N\}, \ldots, \min\{K, N\}\}$;*

*2.*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}} \quad \text{pre každé } x \in \mathcal{H}(X). \tag{10}$$

*Používame označenie $X \sim hyge(M, K, N)$.*

## Veta

*Ak $X \sim hyge(M, K, N)$, tak*

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M}, \qquad D(X) = \frac{(M-N)\cdot N \cdot K}{(M-1)\cdot M}\left(1 - \frac{K}{M}\right). \tag{11}$$

## Príklad

*Triedny učiteľ zistil, že 12 z 30 študentov býva na stredoškolskom internáte. Náhodne vyberieme 10 študentov. Aká je pravdepodobnosť, že*

a) *6 študenti bývajú na stredoškolskom internáte,*

b) *najviac 3 študenti bývajú na stredoškolskom internáte.*

**Riešenie.** $M = 30;\ N = 10;\ K = 12.$

a) $P(X = 6) = \dfrac{\binom{12}{6}\cdot\binom{18}{4}}{\binom{30}{10}} = 0,0941$

b) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

$$\frac{\binom{12}{0}\cdot\binom{18}{10}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{1}\cdot\binom{18}{9}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{2}\cdot\binom{18}{8}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{3}\cdot\binom{18}{7}}{\binom{30}{10}} =$$

$0,00145 + 0,0194 + 0,0961 + 0,2330 = 0,34955$

# Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskrétnej náhodnej premennej $X$, ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu…
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká vo všetkých intervaloch rovnakej dĺžky.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu $\lambda$.

## Definícia

*Náhodná premenná $X$ má* **Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom $\lambda$** *práve vtedy, keď*
*1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$;*
*2.*

$$f(x) = P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} \quad \text{pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{12}$$

*Používame pritom označenie $X \sim poiss(\lambda)$.*

## Veta

*Ak $X \sim poiss(\lambda)$, tak*

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{13}$$

## Príklad

*Rybár chytí priemerne 2 ryby v priebehu 3 hodín. Predpokladajme, že rybár strávi pri rybníku 7 hodín. Aká je pravdepodobnosť, že chytí*
*a) práve 4 ryby, b) aspoň 3 ryby, c) aspoň 3, ale najviac 6 rýb?*

**Riešenie.** $\lambda = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

a) $P(X = 4) = \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} = 0,1858$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$
$1 - [\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^0}{0!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^1}{1!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^2}{2!}] = 0,8443$

c) $P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^3}{3!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^5}{5!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^6}{6!} = 0,6534$