Umorovací počet

Monika Molnárová

Technická univerzita Košice

monika.molnarova@tuke.sk

Obsah

1. Umorovací počet
   - Úvod
   - Pôžičky s povinným jednorazovým splatením
   - Pôžičky s postupným splácaním

Pojem umorovania

Definícia

Umorovaním nazývame proces splácania úrokovej pôžičky, t. j. pôžičky, pri ktorej spláca dlžník veriteľovi okrem požičanej sumy aj úroky z tejto sumy.

Klasifikácia pôžičky podľa spôsobu umorovania

1. Pôžičky bez záväzného splácania tzv. úrokové dlžoby
   - dlžník spláca len dohodnuté úroky v určených termínoch a kedykoľvek môže pôžičku vykúpiť
2. Pôžičky s povinným jednorazovým splatením
   - dlžník pravidelne spláca úroky a pôžičku vráti naraz jednou splátkou v dohodnutom termíne
3. Pôžičky s postupným splácaním v niekoľkých termínoch
   - dlžník pravidelne spláca úroky z nesplateného základu pôžičky a časť dosiaľ nesplateného základu (úmor)

Atribúty pôžičky s povinným jednorazovým splatením

- pravidelné splácanie úrokov
- splatenie dlhu v určenom termíne naraz jednou splátkou
- založenie zabezpečovacieho fondu pre nasporenie sumy vo výške dlhu k termínu splatenia

Ilustrácia

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% ročnú úrokovú mieru. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať na konci každého roka konštantnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

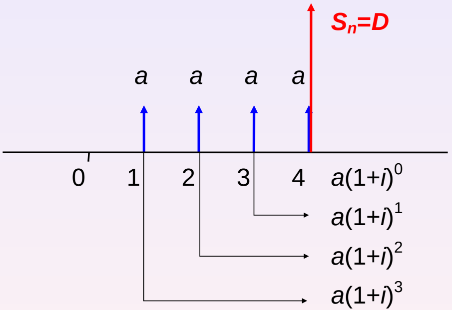
Terminológia a označenie

Použité skratky:

D	veľkosť pôžičky
n	počet rokov splatnosti pôžičky
g	nominálna úroková sadzba pôžičky
p	počet splátok za rok
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
i	ročná úroková sadzba, ak $m = 1$
j	ročná úroková sadzba, ak $m > 1$
u_t	úrok na konci t-tej periódy
a	splátka do fondu
A_t	splátka (anuita) splatná na konci t-tej periódy
	$A_t = u_t + a$

$p = 1$ – Splátky do zabezpečovacieho fondu

Každá splátka narastie za príslušný počet periód o úroky na novú hodnotu. Súčet týchto nových hodnôt na konci doby splatnosti tvorí budúcu hodnotu polehotnej renty S_n a je rovný výške pôžičky.



Obr.: Splátky do zabezpečovacieho fondu

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – $p = 1$

$$D = S_n = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} \quad \Longrightarrow \quad a = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}$$

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – $p = 1$

Veta

Predpokladajme pôžičku vo výške D s povinným jednorazovým splatením. Predpokladajme, že dlh je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g, ročné splátky do zabezpečovacieho fondu sú konštantné a úročenie v banke je ročné s ročnou úrokovou sadzbou i. Pre výšku splátky do zabezpečovacieho fondu a, výšku úroku u a výšku celkovej anuity A platí

$$a = D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}, \tag{1}$$

$$u = D \cdot g, \tag{2}$$

$$A = D \cdot g + D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1}. \tag{3}$$

$p = 1$ - jednorazové splatenie - Príklad 1

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% ročnú úrokovú mieru. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať na konci každého roka konštantnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

Zápis:

$$
\begin{array}{lcl lcl}
D & = & 10\,000 & i & = & 0{,}06 \\
g & = & 0{,}05 & m & = & 1 \\
n & = & 4 & p & = & 1 \\
\hline
a & = & ? & & &
\end{array}
$$

$p = 1$ - jednorazové splatenie - Príklad 1

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
a &= D \cdot \frac{i}{(1+i)^n - 1} = \frac{10\ 000 \cdot 0{,}06}{(1+0{,}06)^4 - 1} = 2\ 285{,}915 \\
u &= D \cdot g = 10\ 000 \cdot 0{,}05 = 500 \\
A &= u + a = 500 + 2\ 285{,}915 = 2\ 785{,}915
\end{aligned}
$$

$p = 1$ - jednorazové splatenie - Príklad 1

výpočet zúročenej splátky do fondu:

$a_t = a \cdot (1 + i)^{n-t}$

$$a_1 = a \cdot (1 + i)^{4-1} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^3 = 2\ 722{,}555$$

$$a_2 = a \cdot (1 + i)^{4-2} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^2 = 2\ 568{,}448$$

$$a_3 = a \cdot (1 + i)^{4-3} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^1 = 2\ 423{,}065$$

$$a_4 = a \cdot (1 + i)^{4-4} = 2\ 285{,}915 \cdot 1{,}06^0 = 2\ 285{,}915$$

$p = 1$ - Umorovací plán pôžičky - Príklad 1

per. t	úroky za periódu u_t	splátka do fondu a	anuita $A_t = u_t + a$	zúročená splátka do fondu $a \cdot (1+i)^{n-t}$
1	500	2 285,915	2 785,915	2 722,555$= a(1+i)^3$
2	500	2 285,915	2 785,915	2 568,448$= a(1+i)^2$
3	500	2 285,915	2 785,915	2 423,065$= a(1+i)^1$
4	500	2 285,915	2 785,915	2 285,915$= a(1+i)^0$
$\sum$	2 000 $+$	9 143,66$=$	11 143,66	9 999,983$\doteq$ D

Ilustrácia

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% nominálnu úrokovú mieru pri štvrťročnom úrokovaní. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať polročnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – p ľubovoľné

$$D = S_n = a \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \quad \Longrightarrow \quad a = D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}$$

Pôžičky s povinným jednorazovým splatením – p ľubovoľné

Veta

Predpokladajme pôžičku vo výške D s povinným jednorazovým splatením. Nech dlh je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g, splátky do zab. fondu sú konštantné a ich počet v roku je p, počet konverzií v banke je m s nominálnou úrokovou sadzbou j. Pre výšku splátky do zab. fondu a, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí

$$a = D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}, \tag{4}$$

$$u_t = \begin{cases} D \cdot g & \text{koncoročná splátka} \\ 0 & \text{inak} \end{cases} \tag{5}$$

$$A_t = u_t + D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n} - 1}. \tag{6}$$

p ľubovoľné - jednorazové splatenie - Príklad 2

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku na modernizáciu zariadenia dielne v hodnote 10 000 eur. Pôžička bola vydaná pri 5% ročnej úrokovej miere a musí byť vrátená jednorazovo o 4 roky. Podnikateľ chce na tento účel vytvoriť v banke zabezpečovací fond, pričom banka poskytuje 6% nominálnu úrokovú mieru pri štvrťročnom úrokovaní. Predpokladajme, že fond sa bude realizovať polročnými splátkami. Zostavme umorovací plán.

Zápis:

$$\begin{array}{lcllcl} D & = & 10\,000 & j & = & 0{,}06 \\ g & = & 0{,}05 & m & = & 4 \\ n & = & 4 & p & = & 2 \\ \hline a & = & ? & & & \end{array}$$

p ľubovoľné - jednorazové splatenie - Príklad 2

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
a &= D \cdot \frac{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{\frac{m}{p}}-1}{\left(1+\frac{j}{m}\right)^{m \cdot n}-1} = 10\,000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{\frac{4}{2}}-1}{\left(1+\frac{0{,}06}{4}\right)^{4 \cdot 4}-1} = \\
&= 1\ 123{,}666
\end{aligned}
$$

$$
u_t = \begin{cases} D \cdot g = 500 & \text{koncoročná splátka} \\ 0 & \text{inak} \end{cases}
$$

$$
A_t = u_t + a = \begin{cases} 500 + 1\ 123{,}666 & \text{koncoročná splátka} \\ 0 + 1\ 123{,}666 & \text{inak} \end{cases}
$$

p ľubovoľné - jednorazové splatenie - Príklad 2

výpočet zúročenej splátky do fondu:

$$a_t = a \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m(n - \frac{t}{p})}$$

$$\begin{aligned}
a_8 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4-\frac{8}{2})} = 1\ 123{,}666 \\
a_7 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4-\frac{7}{2})} = 1\ 123{,}666 \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4 \cdot \frac{1}{2}} = 1\ 157{,}629 \\
a_6 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4-\frac{6}{2})} = 1\ 123{,}666 \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4 \cdot \frac{2}{2}} = 1\ 192{,}618 \\
&\vdots \\
a_1 &= a \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4(4-\frac{1}{2})} = 1\ 123{,}666 \cdot (1 + \frac{0{,}6}{4})^{4 \cdot \frac{7}{2}} = 1\ 384{,}082
\end{aligned}$$

p ľubovoľné – Umorovací plán pôžičky – Príklad 2

per. t	úroky za per. u_t	splátka do fondu a	anuita $A_t = u_t + a$	zúročená splátka do fondu $a \cdot (1 + \frac{j}{m})^{m(n-\frac{t}{p})}$
1	0	1 123,666	1 123,666	1 384,082$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{1}{2})}$
2	500	1 123,666	1 623,666	1 343,475$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{2}{2})}$
3	0	1 123,666	1 123,666	1 304,060$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{3}{2})}$
4	500	1 123,666	1 623,666	1 265,801$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{4}{2})}$
5	0	1 123,666	1 123,666	1 228,665$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{5}{2})}$
6	500	1 123,666	1 623,666	1 192,618$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{6}{2})}$
7	0	1 123,666	1 123,666	1 157,629$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{7}{2})}$
8	500	1 123,666	1 623,666	1 123,666$=a(1+\frac{0,06}{4})^{4(4-\frac{8}{2})}$
$\sum$	2 000	8 989,328	10 989,328	9 999,996

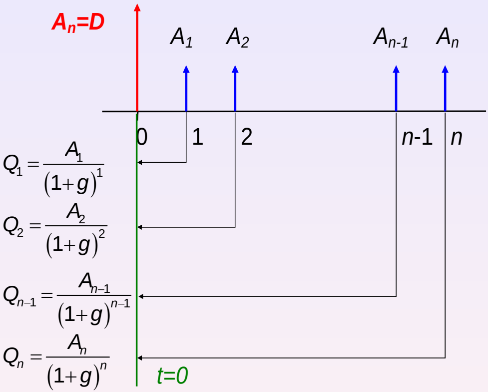
Atribúty pôžičky s postupným splácaním

- pravidelné splácanie úrokov
- postupné splácanie dlhu v pravidelných splátkach
- splátka pozostáva z
  - úmoru (časť dosiaľ nezaplateného dlhu)
  - úroku z dosiaľ nezaplateného dlhu

anuita = úmor + úrok

$$A_t = Q_t + u_t$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním I



Obr.: Výška dlhu

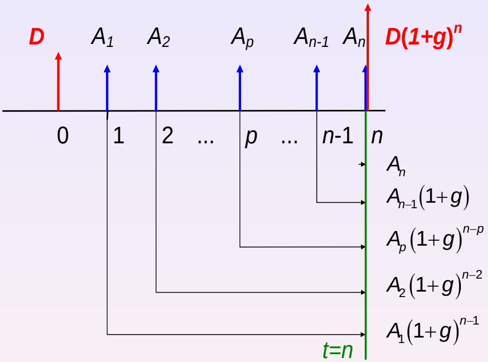
Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním I

Veta

Veľkosť dlhu pôžičky s postupným umorovaním je rovná súčtu súčasných hodnôt všetkých anuít.

$$D = \frac{A_1}{1+g} + \frac{A_2}{(1+g)^2} + \cdots + \frac{A_p}{(1+g)^p} + \cdots + \frac{A_n}{(1+g)^n}$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním II



Obr.: Výška budúcej hodnoty dlhu

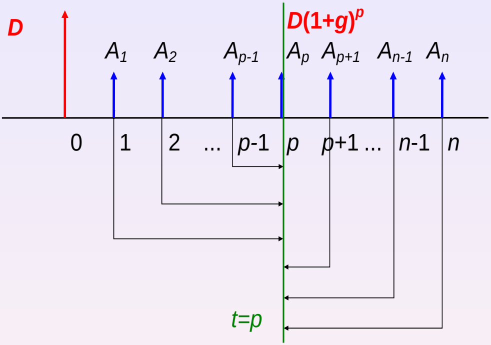
Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním II

Veta

Veľkosť budúcej hodnoty dlhu pôžičky s postupným umorovaním na konci n-tej periódy je rovná súčtu budúcich hodnôt všetkých anuít na konci n-tej periódy.

$$D\cdot(1+g)^n = A_1\cdot(1+g)^{n-1}+A_2\cdot(1+g)^{n-2}+\cdots+A_p\cdot(1+g)^{n-p}+\cdots+A_n$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním III



Obr.: Výška hodnoty dlhu na konci p-tej periódy

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním III

$$
\begin{aligned}
D(1+g)^p \; = \; & A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots A_{p-1}(1+g) + A_p + \\
& + A_{p+1}(1+g)^{-1} + A_{p+2}(1+g)^{-2} + \cdots + \\
& + A_{n-1}(1+g)^{p-n+1} + A_n(1+g)^{p-n}
\end{aligned}
$$

Veta

Zostatok dlhu D_p pôžičky s postupným umorovaním po zaplatení p-tej anuity sa rovná súčtu súčasných hodnôt zostávajúcich $n-p$ anuít A_{p+1}, A_{p+2}, ..., A_n k času $t=p$.

$$
D_p = A_{p+1} \cdot (1+g)^{-1} + A_{p+2} \cdot (1+g)^{-2} + \cdots + A_n \cdot (1+g)^{p-n}
$$

Pravidlá umorovania pôžičiek s postupným umorovaním IV

$$D(1+g)^p = A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots A_{p-1}(1+g) + A_p + \\ +D_p$$

Veta

Zostatok dlhu D_p pôžičky s postupným umorovaním po zaplatení p-tej anuity sa rovná rozdielu medzi budúcou hodnotou dlhu na konci p-tej periódy a súčtom budúcich hodnôt prvých p anuít A_1, A_2, ..., A_p k času $t = p$.

$$D_p = D(1+g)^p - \left[A_1(1+g)^{p-1} + A_2(1+g)^{p-2} + \cdots + A_{p-1}(1+g) + A_p\right]$$

Ilustrácia

Príklad 1:

Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných **konštantných umorovacích splátok**.

Príklad 2:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Dlh má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných **konštantných anuít**.

Terminológia a označenie

Použité skratky:

n	počet rokov splatnosti pôžičky
g	nominálna úroková sadzba pôžičky
p	počet splátok za rok
m	počet úrokových periód (konverzií) za rok
D_t	výška dlhu na konci t-tej periódy
Q_t	výška úmoru na konci t-tej periódy
u_t	úrok na konci t-tej periódy
A_t	splátka (anuita) splatná na konci t-tej periódy

Pôžičky s postupným splácaním

- výška splátky

$$A_t = Q_t + u_t$$

- výška úroku

$$u_t = D_{t-1} \cdot g, \quad \text{resp.} \quad u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}$$

- výška úmoru

$$Q_t = D_{t-1} - D_t$$

Klasifikácia pôžičiek s postupným splácaním

1. pôžičky s rovnomerným splácaním

$$A_t = Q + u_t$$

2. pôžičky s anuitným splácaním

$$A = Q_t + u_t$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním

Definícia

Pôžičkou s rovnomerným splácaním nazývame takú pôžičku s postupným splácaním, pri ktorej je výška úmoru konštantná, t. j.

$$Q_t = Q \qquad t = 1, 2, \ldots n \cdot p$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním – $p = 1$

Veta

Predpokladajme pôžičku s rovnomerným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že zostatok dlhu je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g a splátka je realizovaná raz do roka. Pre výšku úmoru Q, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí

$$\begin{aligned} Q &= \frac{D}{n}, && (7)\\ u_t &= D_{t-1} \cdot g, && (8)\\ A_t &= u_t + Q. && (9) \end{aligned}$$

$p = 1$ – Pôžičky s rovnomerným splácaním – Algoritmus

Algoritmus:

1. $Q = \frac{D}{n}$
2. $D_0 = D$
3. $u_1 = D_0 \cdot g$
4. $A_1 = Q + u_1$
5. $D_1 = D_0 - Q$
6. $u_2 = D_1 \cdot g$

$$\vdots$$

$p = 1$ - rovnomerné splácanie - Príklad

Príklad:

Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných konštantných umorovacích splátok.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} D & = & 100\,000 \\ g & = & 0{,}1 \\ n & = & 4 \\ \hline Q & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - rovnomerné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$\begin{aligned}
Q &= \frac{D}{n} = \frac{100\ 000}{4} = 25\ 000 \\
D_0 &= D = 100\ 000 \\
u_1 &= D_0 \cdot g = 100\ 000 \cdot 0{,}1 = 10\ 000 \\
A_1 &= Q + u_1 = 25\ 000 + 10\ 000 = 35\ 000 \\
D_1 &= D_0 - Q = 100\ 000 - 25\ 000 = 75\ 000 \\
u_2 &= D_1 \cdot g = 75\ 000 \cdot 0{,}1 = 7\ 500 \\
&\ \vdots
\end{aligned}$$

$p = 1$ – Umorovací plán pôžičky – Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q = \frac{D}{n}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	10 000	25 000	35 000
2	75 000	7 500	25 000	32 500
3	50 000	5 000	25 000	30 000
4	25 000	2 500	25 000	27 500
$\sum$	—	25 000	100 000	125 000

Pôžičky s rovnomerným splácaním – postupnosť zostatkov dlhu

Veta (veta o postupnosti zostatkov dlhu)

Zostatky dlhov D_0, D_1, ..., D_{n-1} pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D_t &= D_{t-1} - Q \\ D_t - D_{t-1} &= -Q \\ D_t - D_{t-1} &= -\frac{D}{n} \qquad (= d) \end{aligned}$$

Dôsledok

Zostatok dlhu D_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je

$$D_t = D_0 - t \cdot \frac{D}{n}$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním – postupnosť úrokov

Veta (veta o postupnosti úrokov)

Splátky úrokov u_1, u_2, ..., u_n pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} u_t &= D_{t-1} \cdot g \\ u_{t+1} &= D_t \cdot g \\ u_{t+1} - u_t &= (D_t - D_{t-1}) \cdot g = -\tfrac{D}{n} \cdot g \qquad (= d) \end{aligned}$$

Dôsledok

Splátka úroku u_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je

$$u_t = u_1 + (t-1) \cdot \left(-\frac{D}{n}\right) \cdot g$$

Pôžičky s rovnomerným splácaním – postupnosť anuít

Veta (veta o postupnosti anuít)

Anuity A_1, A_2, ..., A_n pri pôžičke s rovnomerným splácaním tvoria klesajúcu aritmetickú postupnosť.

Dôkaz:

$$\begin{aligned} A_t &= u_t + Q \\ A_{t+1} &= u_{t+1} + Q \\ A_{t+1} - A_t &= u_{t+1} - u_t = -\frac{D}{n} \cdot g \qquad (= d) \end{aligned}$$

Dôsledok

Anuita A_t na konci t-tej periódy pri pôžičke s rovnomerným splácaním je

$$A_t = A_1 + (t-1) \cdot \left(-\frac{D}{n}\right) \cdot g$$

$p = 1$ – Umorovací plán pôžičky – Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q = \frac{D}{n}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	10 000	25 000	35 000
2	75 000	7 500	25 000	32 500
3	50 000	5 000	25 000	30 000
4	25 000	2 500	25 000	27 500
$\sum$	—	25 000	100 000	125 000

Pôžičky s rovnomerným splácaním – p ľubovoľné

Veta

Predpokladajme pôžičku s rovnomerným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že splátka je realizovaná $p-$krát do roka a zostatok dlhu je úročený tiež $p-$krát do roka nominálnou úrokovou sadzbou g. Pre výšku úmoru Q, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A_t platí

$$Q = \frac{D}{n \cdot p}, \tag{10}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{p}, \tag{11}$$

$$A_t = u_t + Q. \tag{12}$$

p ľubovoľné - rovnomerné splácanie - Príklad

Príklad:

Dlh v sume 100 000 eur je vydaný pri 10% ročnej úrokovej miere s polročným úrokovaním a má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných umorovacích splátok.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} D & = & 100\,000 \\ g & = & 0{,}1 \\ n & = & 4 \\ m & = & 2 \\ p & = & 2 \\ \hline Q & = & ? \end{array}$$

p ľubovoľné - rovnomerné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$Q = \frac{D}{n \cdot p} = \frac{100\ 000}{4 \cdot 2} = 12\ 500$$

$$D_0 = D = 100\ 000$$

$$u_1 = D_0 \cdot \frac{g}{p} = 100\ 000 \cdot \frac{0{,}1}{2} = 5\ 000$$

$$A_1 = Q + u_1 = 12\ 500 + 5\ 000 = 17\ 500$$

$$D_1 = D_0 - Q = 100\ 000 - 12\ 500 = 87\ 500$$

$$u_2 = D_1 \cdot \frac{g}{p} = 87\ 500 \cdot \frac{0{,}1}{2} = 4\ 375$$

$$u_2 - u_1 = 4\ 375 - 5\ 000 = -625$$

p ľubovoľné – Umorovací plán pôžičky – Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1}\cdot\frac{g}{p}$	úmor $Q = \frac{D}{n\cdot p}$	anuita $A_t = Q + u_t$
1	100 000	5 000	12 500	17 500
2	87 500	4 375	12 500	16 875
3	75 000	3 750	12 500	16 250
4	62 500	3 125	12 500	15 625
5	50 000	2 500	12 500	15 000
6	37 500	1 875	12 500	14 375
7	25 000	1 250	12 500	13 750
8	12 500	625	12 500	13 125
$\sum$	—	22 500	100 000	122 500

Ilustrácia

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Dlh má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných konštantných anuít.

Pôžičky s anuitným splácaním

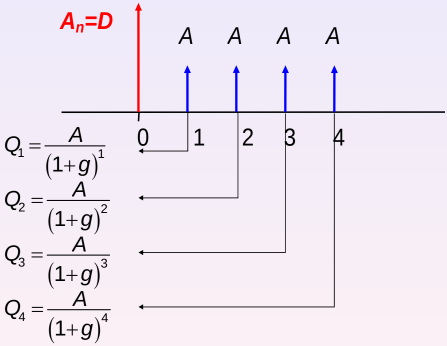
Definícia

Pôžičkou s anuitným splácaním nazývame takú pôžičku s postupným splácaním, pri ktorej je výška splátky (anuity) konštantná, t. j.

$$A_t = A \qquad t = 1, 2, \dots n \cdot p$$

Anuitné splácanie – $p = 1$

Súčet odúročených splátok tvorí súčasnú hodnotu polehotnej konštantnej renty A_n a je rovný výške pôžičky.



Obr.: Výška anuity

Anuitné splácanie – $p = 1$

súčasná hodnota polehotnej renty

$$A_n = R \cdot \frac{1-(1+g)^{-n}}{g}$$

položme $D = A_n$ a $A = R$

$$D = A \cdot \frac{1-(1+g)^{-n}}{g} \quad \Longrightarrow \quad A = D \cdot \frac{g}{1-(1+g)^{-n}}$$

Anuitné splácanie – $p = 1$

Veta

Predpokladajme pôžičku s anuitným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že zostatok dlhu je úročený raz do roka ročnou úrokovou sadzbou g a splátka je realizovaná raz do roka. Pre výšku úmoru Q_t, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A platí

$$A = D \cdot \frac{g}{1-(1+g)^{-n}}, \tag{13}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot g, \tag{14}$$

$$Q_t = A - u_t. \tag{15}$$

Anuitné splácanie – Algoritmus

Algoritmus:

1. $A = D \cdot \dfrac{g}{1-(1+g)^{-n}}$
2. $D_0 = D$
3. $u_1 = D_0 \cdot g$
4. $Q_1 = A - u_1$
5. $D_1 = D_0 - Q_1$
6. $u_2 = D_1 \cdot g$

$$\vdots$$

$p = 1$ - anuitné splácanie - Príklad

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% ročnej úrokovej miere. Dlh má byť splatený do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu ročných konštantných anuít.

Zápis:

$$\begin{array}{rcl} D & = & 10\,000 \\ g & = & 0{,}05 \\ n & = & 4 \\ \hline A & = & ? \end{array}$$

$p = 1$ - anuitné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
A &= D \cdot \frac{g}{1-(1+g)^{-n}} = 10\ 000 \cdot \frac{0{,}05}{1-(1+0{,}05)^{-4}} = 2\ 820{,}11833 \\
D_0 &= D = 10\ 000 \\
u_1 &= D_0 \cdot g = 10\ 000 \cdot 0{,}05 = 500 \\
Q_1 &= A - u_1 = 2\ 820{,}11833 - 500 = 2\ 320{,}11833 \\
D_1 &= D_0 - Q_1 = 10\ 000 - 2\ 320{,}11833 = 7\ 679{,}88167 \\
u_2 &= D_1 \cdot g = 7\ 679{,}88167 \cdot 0{,}05 = 383{,}99408 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Anuitné splácanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t=D_t)$	úroky za periódu $u_t=D_{t-1}\cdot g$	úmor $Q_t=A-u_t$	anuita A
1	10 000,00000	500,00000	2 320,11833	2 820,11833
2	7 679,88167	383,99408	2 436,12424	2 820,11833
3	5 243,75743	262,18787	2 557,93045	2 820,11833
4	2 685,82698	134,29135	2 685,82698	2 820,11833
$\sum$	—	1 280,47330	10 000,00000	11 280,47330

Anuitné splácanie – postupnosť umorovacích splátok

Veta (veta o postupnosti úmorov)

Umorovacie splátky Q_1, Q_2, ..., Q_n pri pôžičke s anuitným splácaním tvoria rastúcu geometrickú postupnosť.

Dôkaz:

$$
\begin{aligned}
A_t &= Q_t + u_t = Q_t + D_{t-1} \cdot g \\
A_{t+1} &= A_t \\
Q_{t+1} + D_t \cdot g &= Q_t + D_{t-1} \cdot g \\
Q_{t+1} &= Q_t + (D_{t-1} - D_t) \cdot g \\
Q_{t+1} &= Q_t + Q_t \cdot g \\
Q_{t+1} &= Q_t \cdot (1 + g)
\end{aligned}
$$

$$
\frac{Q_{t+1}}{Q_t} = 1 + g
$$

Anuitné splácanie – prvá umorovacia splátka

Dôsledok

Výška prvej umorovacej splátky Q_1 pri pôžičke s anuitným splácaním spĺňa

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}$$

Dôkaz:

$$\begin{aligned} D &= Q_1 + Q_2 + \cdots Q_n = \\ &= Q_1 + Q_1(1+g) + Q_1(1+g)^2 + \cdots + Q_1(1+g)^{n-1} \end{aligned}$$

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{1+g-1}$$

$$D = Q_1 \cdot \frac{(1+g)^n - 1}{g}$$

Anuitné splácanie – p ľubovoľné

súčasná hodnota polehotnej renty

$$A_n = R \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}$$

položme $D = A_n$ a $A = R$

$$D = A \cdot \frac{1 - \left(1 + \frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}{\left(1 + \frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1} \quad \Longrightarrow \quad A = D \cdot \frac{\left(1 + \frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1 - \left(1 + \frac{g}{m}\right)^{-m \cdot n}}$$

Anuitné splácanie – p ľubovoľné

Veta

Predpokladajme pôžičku s anuitným splácaním vo výške D s počtom rokov splatnosti n. Predpokladajme, že splátka je realizovaná $p-$krát do roka a zostatok dlhu je úročený $m-$krát do roka nominálnou úrokovou sadzbou g. Pre výšku úmoru Q_t, výšku úroku u_t a výšku celkovej anuity A platí

$$A = D \cdot \frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1-\left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m\cdot n}}, \tag{16}$$

$$u_t = D_{t-1} \cdot \left[\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1\right], \tag{17}$$

$$Q_t = A - u_t. \tag{18}$$

$p = m$ ľubovoľné - anuitné splácanie - Príklad

Príklad:

Podnikateľ si zobral pôžičku v hodnote 10 000 eur pri 5% nominálnej úrokovej miere a polročnom úrokovaní, ktorá má byť splatená do 4 rokov. Zostavme umorovací plán za predpokladu polročných konštantných anuít.

Zápis:

$$\begin{array}{lcl} D & = & 10\,000 \\ g & = & 0{,}05 \\ m & = & 2 \\ p & = & 2 \\ n & = & 4 \\ \hline A & = & ? \end{array}$$

$p = m$ ľubovoľné - anuitné splácanie - Príklad

Riešenie:

$$
\begin{aligned}
A &= D \cdot \frac{\left(1+\frac{g}{m}\right)^{\frac{m}{p}} - 1}{1-\left(1+\frac{g}{m}\right)^{-m\cdot n}} = 10\ 000 \cdot \frac{\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^{\frac{2}{2}} - 1}{1-\left(1+\frac{0{,}05}{2}\right)^{-2\cdot 4}} = 1\ 394{,}67346 \\
D_0 &= D = 10\ 000 \\
u_1 &= D_0 \cdot \frac{g}{m} = 10\ 000 \cdot \frac{0{,}05}{2} = 250 \\
Q_1 &= A - u_1 = 1\ 394{,}67346 - 250 = 1\ 144{,}67346 \\
D_1 &= D_0 - Q_1 = 10\ 000 - 1\ 144{,}67346 = 8\ 855{,}32654 \\
u_2 &= D_1 \cdot \frac{g}{m} = 8\ 855{,}32654 \cdot \frac{0{,}05}{2} = 221{,}38316 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Anuitné splácanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot \frac{g}{m}$	úmor $Q_t = A - u_t$	anuita A
1	10 000,00000	250,00000	1 144,67346	1 394,67346
2	8 855,32654	221,38316	1 173,29029	1 394,67346
3	7 682,03624	192,05091	1 202,62255	1 394,67346
4	6 479,41369	161,98534	1 232,68812	1 394,67346
5	5 246,72557	131,16814	1 263,50532	1 394,67346
6	3 983,22025	99,58051	1 295,09295	1 394,67346
7	2 688,12730	67,20318	1 327,47028	1 394,67346
8	1 360,65702	34,01644	1 360,65703	1 394,67346
$\sum$	—	1 157,38768	10 000,00000	11 157,38768

Špeciálne umorovanie - Príklad 1

Príklad:

Pôžička vo výške 40 000 eur má byť splácaná ročnými splátkami. Prvá splátka vo výške 10 000 eur je splatná po 2. roku. Po koľkých rokoch bude dlh splatený pri ročnej úrokovej miere 10 %? Aká bude výška poslednej splátky? Zostavme umorovací plán.

Zápis:

$$
\begin{array}{lcll}
D & = & 40\,000 & \\
g & = & 0{,}1 & \\
A_1 & = & 0 & \\
A_t & = & 10\,000 & \text{pre } t \geq 2 \\
\hline
n & = & ? & \\
A_n & = & ? &
\end{array}
$$

Špeciálne umorovanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad 1

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t=D_t)$	úroky za periódu $u_t=D_{t-1}\cdot g$	úmor $Q_t=A_t-u_t$	anuita $A_t=u_t+Q_t$
1	40 000,0000	4 000,0000	-4 000,0000	0,0000
2	44 000,0000	4 400,0000	5 600,0000	10 000,0000
3	38 400,0000	3 840,0000	6 160,0000	10 000,0000
4	32 240,0000	3 224,0000	6 776,0000	10 000,0000
5	25 464,0000	2 546,4000	7 453,6000	10 000,0000
6	18 010,4000	1 801,0400	8 198,9600	10 000,0000
7	9 811,4400	981,1440	9 018,8560	10 000,0000
8	792,5840	79,2584+	792,5840=	871,8424
$\sum$	—	20 871,8424	40 000,0000	60 871,8424

Špeciálne umorovanie - Príklad 2

Príklad:

Pôžička vo výške 40 000 eur má byť splácaná ročnými splátkami. Prvá splátka vo výške 10 000 eur je splatná po 2. roku. Ďalšie splátky sa majú postupne zvyšovať o 4 000 eur. Po koľkých rokoch bude dlh splatený pri ročnej úrokovej miere 18 %? Aká bude výška poslednej splátky? Zostavme umorovací plán.

Zápis:

$$
\begin{array}{lcl}
D & = & 40\,000 \\
g & = & 0{,}18 \\
A_1 & = & 0 \\
A_t & = & 10\,000 + (t-2) \cdot 4\,000 \qquad \text{pre } t \geq 2 \\
\hline
n & = & ? \\
A_n & = & ?
\end{array}
$$

Špeciálne umorovanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad 2

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t=D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q_t = A_t - u_t$	anuita $A_t = u_t + Q_t$
1	40 000,00000	7 200,00000	-7 200,00000	0,00000
2	47 200,00000	8 496,00000	1 504,00000	10 000,00000
3	45 696,00000	8 225,28000	5 774,72000	14 000,00000
4	39 921,28000	7 185,83040	10 814,16960	18 000,00000
5	29 107,11040	5 239,27987	16 760,72013	22 000,00000
6	12 346,39027			

Špeciálne umorovanie - Umorovací plán pôžičky - Príklad 2

per. t	zvyšok dlhu na začiatku per. $D_{t-1}(-Q_t = D_t)$	úroky za periódu $u_t = D_{t-1} \cdot g$	úmor $Q_t = A_t - u_t$	anuita $A_t = u_t + Q_t$
1	40 000,00000	7 200,00000	-7 200,00000	0,00000
2	47 200,00000	8 496,00000	1 504,00000	10 000,00000
3	45 696,00000	8 225,28000	5 774,72000	14 000,00000
4	39 921,28000	7 185,83040	10 814,16960	18 000,00000
5	29 107,11040	5 239,27987	16 760,72013	22 000,00000
6	12 346,39027	2 222,35025+	12 346,39027=	14 568,74052
$\sum$	—	38 568,74052	40 000,00000	78 568,74052

Ďakujem za pozornosť.