Matematika 2 – 11.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Lokálne extrémy funkcie dvoch premenných

Stacionárny bod - bod, v ktorom je parciálna derivácia 1. rádu funkcie ***z* = *f* (*x*,*y*)** rovná nule:

$$z'_x = 0, z'_y = 0$$

Kritický bod - je stacionárny bod alebo bod, v ktorom neexistuje parciálna derivácia 1. rádu

Funkcia ***z* = *f* (*x*,*y*)** má lokálny extrém len v kritickom bode.

Postačujúca podmienka existencie lokálneho extrému: nech bod A je stacionárny bod funkcie $z = f(x,y)$ a <u>má spojité derivácie 1 a 2. rádu v okolí A:</u>

I. ak $$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} z''_{xx}(\mathrm{A}) & z''_{xy}(\mathrm{A}) \\ z''_{yx}(\mathrm{A}) & z''_{yy}(\mathrm{A}) \end{vmatrix} > 0$$

potom, ak $\Delta_1(A) = z''_{xx}(\mathrm{A}) \neq 0$, tak $z = f(x,y)$ <u>má</u> v **A lokálny extrém**

a) lokálne maximum, ak súčasne platí $\Delta_1(A) < 0$

b) lokálne minimum, ak súčasne platí $\Delta_1(A) > 0$

II. ak $\Delta_2(A) < 0$, tak $z = f(x,y)$ <u>nemá</u> v **A lokálny extrém,** bod A je <u>sedlový bod</u>

III. ak $\Delta_2(A) = 0$, **nevieme rozhodnúť o extréme**

Pr. 1 – 88 / 8: Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z = x^2 + y^2 + 10y - 5$$

1. **Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule**

2. **Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu**

3. **Určíme $\Delta_2(A)$, $\Delta_1(A)$ a zistíme, či funkcia má lokálne extrémy**

Pr. 2 – 88 / 6: Nájdite lokálne extrémy funkcie

$z = 8 - x^2 - y^2 + 6y$ lok. max. v $[0,3]$

1. **Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule**

$z'_x = -2x \quad z'_x = -2x = 0$

$x = 0$

$z'_y = -2y + 6 \quad z'_y = -2y + 6 = 0$

$-2y = -6$

$y = 3$

stacionárny bod A $[\mathbf{0}, \mathbf{3}]$

2. **Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu**

$z''_{xx} = -2 \qquad z''_{xy} = 0$

$z''_{yx} = 0 \qquad z''_{yy} = -2$

3. **Určíme Δ_2(A), Δ_1(A) a zistíme, či funkcia má lokálne extrémy**

$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad \Delta_1(A) = z''_{xx}(\mathrm{A}) = -2 < 0$

v bode A má funkcia lokálne maximum

Pr. 3 – 88 / 27: Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy - 4$$

Pr. 4 – 89 / 42: Nájdite lokálne extrémy funkcie

$z = x^4 + 2y^2 + 4xy$ lok. min. v $[1,-1]$ a $[-1,1]$

1. **Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule**

$z'_x = 4x^3 + 4y \quad z'_x = 4x^3 + 4y = 0 \qquad z'_y = 4y + 4x \quad z'_y = 4y + 4x = 0$

$4x^3 + 4(-x) = 0 \qquad 4y = -4x$

$4x(x^2 - 1) = 0 \qquad y = -x$

$4x = 0\,,\ (x^2 - 1) = 0$

$\boldsymbol{x = 0}\,, \qquad x^2 = 1 \rightarrow \boldsymbol{x = \pm 1}$

$\boldsymbol{y = 0} \qquad \boldsymbol{y = -x = -1, y = -(1) = 1}$

stacionárne body A $[\mathbf{0}, \mathbf{0}]$, **B** $[\mathbf{1}, -\mathbf{1}]$, **C** $[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$

2. **Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu**

$z''_{xx} = 12x^2 \quad z''_{xy} = 4$

$z''_{yx} = 4 \qquad z''_{yy} = 4$

3. Určíme Δ_2, Δ_1 pre stacionárne body a zistíme, či funkcia má v týchto bodoch lokálne extrémy

	A	B	C
$z''_{xx} = 12x^2$	0	$12.1^2 = 12$	$12.(-1)^2 = 12$
$z''_{xy} = 4$	4	4	4
$z''_{yx} = 4$	4	4	4
$z''_{yy} = 4$	4	4	4

$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 0 - 16 < 0,\quad \Delta_1(A) = z''_{xx}(\mathrm{A}) = 0$

v bode A funkcia nemá extrém, sedlový bod

$\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 > 0,\quad \Delta_1(B) = z''_{xx}(\mathrm{B}) = 12 > 0$

v bode B má funkcia extrém, lokálne minimum

$\Delta_2(C) = \begin{vmatrix} 12 & 4 \\ 4 & 4 \end{vmatrix} = 48 - 16 > 0,\quad \Delta_1(C) = z''_{xx}(C) = 12 > 0$

v bode C má funkcia extrém, lokálne minimum

Kontrolka: Vyberte správne odpovede.

1. $\mathrm{Ak}\ \Delta_2(A) = 2$ a $\Delta_1(A) = -3$, potom funkcia z = f (x,y) v bode A
   a) nemá lokálny extrém, b) má lokálne minimum, c) má lokálne maximum.

2. Funkcia z = f (x,y) nemá v bode C lokálny extrém, ak
   a) $\Delta_2(C) = 0$, b) $\Delta_2(C) > 0$, c) $\Delta_2(C) < 0$, d) $\Delta_1(C) < 0$.

3. Ak $\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$, potom $\Delta_1(A)$ je dané

   a) 5, b) 0, c) 2, d) - 5.

Pr. 5 – 89 / 40: Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z = 2x^3 + y^2 x - 216x + 5$$

Pr. 6 – 88 / 19: Nájdite lokálne extrémy funkcie

$z = x^2 + y^2 + xy + 5x - 5y + 3$ lok. min. v $[-5,5]$

1. **Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x, y) a dáme derivácie rovné nule**

$z'_x = 2x + y + 5$ $\quad$ $z'_x = 2x + y + 5 = 0$ $\quad$ $z'_y = 2y + x - 5$ $\quad$ $z'_y = 2y + x - 5 = 0$

$y = -2x - 5 \longrightarrow 2(-2x-5) + x - 5 = 0$

$-4x - 10 + x - 5 = 0$

$y = -2.(-5) - 5 = 10 - 5 = 5$ $\quad$ $-3x = 15$

$\boldsymbol{y = 5}$ $\quad$ $\boldsymbol{x = -5}$

stacionárny bod A $[-5, 5]$

2. **Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu**

$z''_{xx} = 2$ $\quad$ $z''_{xy} = 1$

$z''_{yx} = 1$ $\quad$ $z''_{yy} = 2$

3. **Určíme Δ_2,(A) $\Delta_{1(A)}$ a zistíme, či funkcia má lokálny extrém**

$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 > 0,$ $\quad$ $\Delta_1(A) = z''_{xx}(\mathrm{A}) = 2 > 0$

v bode A funkcia má extrém, lokálny minimum

Pr. 7 – 89 / 54: Nájdite lokálne extrémy funkcie

$$z = xy + \ln x + y^2$$

Dú: str. 88 /9 - 11, 20, 23, 26, 31, 39, 42, 46, 48

9. Malá písomka

1. (1b) Určte dotykovú rovinu ku grafu funkcie $z = x^2 - 4y$ v bode A [2, 1, ?].

$z_0 = x_0^2 - 4y_0 = 2^2 - 4.1 = 4 - 4 = 0$ 0,2

$z'_x = 2x,\ z'_y = -4$ 0,2

$z'_x(A) = 2.2 = 4,\ z'_y(A) = -4$ 0,2

ρ: $z - z_0 = z'_x(A)(x - x_0) + z'_y(A)(y - y_0)$ 0,1

$z - 0 = 4(x - 2) - 4(y - 1)$ 0,1

$0 = 4x - 8 - 4y + 4 - z$ 0,1

$\boldsymbol{\rho}$: $\mathbf{0 = 4x - 4y - z - 4}$ 0,1