

Matematika 2 – 12.cvičenie

opakujúci

RNDr. Z. Gibová, PhD.

DIFERENCIÁLNY POČET FUNKCIE VIAC PREMENNÝCH

Viazané extrémymy funkcie dvoch premenných

Nech je daná funkcia $z = f(x, y)$ definovaná na M a nech L je množina všetkých bodov z M , pre ktoré platí $g(x, y) = 0$.

Viazaný lokálny extrém - lokálny extrém funkcie $z = f(x, y)$ na množine L

Funkciu $g(x, y) = 0$ – nazývame **väzba**

Určenie viazaných extrémov:

1. Ak sa dá vyjadriť z väzby jednoznačne niektorá premenná - dosadíme ju do funkcie, dostaneme funkciu jednej premennej, viazaný extrém hľadáme ako lokálny extrém jednej premennej

z''_x alebo $z''_y > 0 \rightarrow$ **viazané lokálne minimum**

z''_x alebo $z''_y < 0 \rightarrow$ **viazané lokálne maximum**

2. Ak sa z väzby nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

Stacionárny bod sa určí zo sústavy

$$L'_x = 0$$

$$L'_y = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

viazaný extrém sa určí ako pri lokálnych extrémoch

Pr. 1 – 93 / 7: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = x^2 + y^2 - 4x + 4y + 8, \text{ ak } x + y = 0$$

1. **Vyjadríme z väzby niektorú premennú, dosadíme ju do funkcie, dostaneme funkciu jednej premennej**
2. **Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu podľa x alebo y) a dáme deriváciu rovnú nule, druhú súradnicu stacionárneho bodu určíme z väzby**
3. **Vypočítame parciálnu deriváciu druhého rádu**
4. **Určíme $\Delta_1(A) = z''_{xx}$ alebo z''_{yy} a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémny**

Pr. 2 – 93 / 15: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = 2xy - 2x^2 - 4y^2, \text{ ak } x + 2y = 8$$

Pr. 3 – 93 / 10: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = 46 - x^2 - 4y^2 + 2xy, \text{ ak } x - 2y = 0 \quad \text{lok. max. v } [0, 0]$$

1. Vyjadríme z väzby niektorú premennú, dosadíme ju do funkcie $z = f(x, y)$, dostaneme funkciu jednej premennej

$$\begin{aligned} x - 2y = 0 &\rightarrow x = 2y & z &= 46 - (2y)^2 - 4y^2 + 2(2y)y \\ & & z &= 46 - 4y^2 - 4y^2 + 4y^2 = 46 - 4y^2 \end{aligned}$$

2. Určíme stacionárne body (derivujeme funkciu $z = f(x, y)$ podľa x alebo y) a dáme deriváciu rovnú nule, druhú súradnicu stacionárneho bodu určíme z väzby

$$z'_y = -8y$$

$$z'_y = -8y = 0 \rightarrow y = 0$$

$$x = 2y = 2 \cdot 0 = 0 \quad \text{SB: } A [0, 0]$$

3. Vypočítame parciálnu deriváciu druhého rádu pre funkciu $z = f(x, y)$

$$z''_{yy} = -8$$

4. Určíme $\Delta_1(A) = z''_{xx}$ alebo z''_{yy} a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémny

$$\Delta_1(A) = z''_{yy} = -8 < 0 \quad \rightarrow \text{v bode } A \text{ má funkcia viazané lokálne maximum}$$

Pr. 4 – 93 / 13: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = x^3 + y^3 + 3xy + 2, \text{ ak } y - x = 0$$

Pr. 5 – 93 / 12: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = x^3 + 8y^3 - 6xy + 1, \text{ ak } 2y - x = 0 \quad \text{lok. min. v } [1, \frac{1}{2}]$$

$$\text{lok. max. v } [0, 0]$$

$$x - 2y = 0 \rightarrow x = 2y \quad z = (2y)^3 + 8y^3 - 6(2y)y + 1$$

$$z = 8y^3 + 8y^3 - 12y^2 + 1 = 16y^3 - 12y^2 + 1$$

$$z'_y = 48y^2 - 24y \quad z'_y = 48y^2 - 24y = 0$$

$$24y(2y - 1) = 0 \rightarrow 24y = 0, 2y - 1 = 0$$

$$y = 0 \quad y = \frac{1}{2}$$

$$SB: A [0, 0], B [1; 0, 5]$$

$$x = 2 \cdot 0 = 0 \quad x = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$z''_y = 96y - 24$$

$$\Delta_1(A) = z''_y = 96 \cdot 0 - 24 = -24 < 0 \rightarrow \text{v bode A má funkcia viazané lokálne maximum}$$

$$\Delta_1(B) = z''_y = 96 \cdot 0,5 - 24 = 24 > 0 \rightarrow \text{v bode B má funkcia viazané lokálne minimum}$$

Pr. 6 – 93 / 22:Nájdite viazané extrémym funkcie

$$z = 8 - 2x - 4y, \text{ ak } x^2 + 2y^2 = 12$$

1. Z väzby sa nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná zostrojíme Lagrangeovu funkciu

$$L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$$

2. Derivujeme Lagrangeovu funkciu podľa x a y

3. Určíme stacionárne body zo sústavy
- $$\begin{aligned} L'_x &= 0 \\ L'_y &= 0 \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned}$$

4. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu Lagrangeovej funkcie a ich hodnoty pre stacionárne body

5. Určíme $\Delta_2(A)$ a $\Delta_1(A)$ pre všetky stacionárne body a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrémym

Pr. 7 – 94 / 28: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \text{ ak } \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 2$$

Pr. 8 – 94 / 24: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = x - 2y + 3, \text{ ak } x^2 + y^2 = 5$$

$$\text{lok. min. v } [-1, 2]$$

$$\text{lok. max. v } [1, -2]$$

- 1. Z väzby sa nedá jednoznačne vyjadriť niektorá premenná, zostrojíme Lagrangeovu funkciu $L(x, y) = f(x, y) + \lambda g(x, y)$**

$$L(x, y) = x - 2y + 3 + \lambda(x^2 + y^2 - 5)$$

- 2. Derivujeme Lagrangeovu funkciu podľa x a y**

$$L'_x = 1 + 2\lambda x$$

$$L'_y = -2 + 2\lambda y$$

- 3. Určíme stacionárne body zo sústavy**

$$L'_x = 0$$

$$L'_y = 0$$

$$g(x, y) = 0$$

$$1 + 2\lambda x = 0 \quad -2 + 2\lambda y = 0$$

$$x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$2\lambda x = -1$$

$$2\lambda y = 2$$

$$x = -\frac{1}{2\lambda}$$

$$y = \frac{1}{\lambda}$$

$$\left(-\frac{1}{2\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 - 5 = 0$$

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 5 \rightarrow \frac{1 + 4}{4\lambda^2} = 5 \rightarrow$$

$$\lambda^2 = \frac{1}{4}$$

$$\lambda = \pm \frac{1}{2}$$

$$\lambda = \frac{1}{2}: \quad x = -\frac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} = -1 \quad y = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

$$SB: A [-1, 2], B[1, -2]$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}: \quad x = -\frac{1}{2 \left(-\frac{1}{2}\right)} = 1 \quad y = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2$$

4. Vypočítame parciálne derivácie druhého rádu Lagrangeovej funkcie a ich hodnoty pre stacionárne body

	A: $\lambda = \frac{1}{2}$	B: $\lambda = -\frac{1}{2}$
$L'_{xx} = 2\lambda$	1	-1
$L'_{xy} = 0$	0	0
$L'_{yx} = 0$	0	0
$L'_{yy} = 2\lambda$	1	-1

5. Určíme $\Delta_2(A)$ a $\Delta_1(A)$ pre všetky stacionárne body a zistíme, či funkcia má viazané lokálne extrém

$$\Delta_2(A) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_1(A) = L''_{xx}(A) = 1 > 0$$

v bode A má funkcia viazané lokálne minimum

$$\Delta_2(B) = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 > 0, \quad \Delta_1(B) = L''_{xx}(B) = -1 < 0$$

v bode B má funkcia viazané lokálne maximum

Pr. 9 – 94 / 25: Nájdite viazané extrémny funkcie

$$z = y - x + 3, \text{ ak } x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$$

$$\text{lok. min. v } \left[\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right]$$

$$\text{lok. max. v } \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Dú: str. 94 / 8, 14, 21, 22, 23, 27, 29

Inštrukcie k 2. zápočtovej písomke

Pondelok 19. 5. 2025, 9:00, P25

čas: 70 minút, 6 príkladov, 35 bodov, teória 15 bodov (prezentácie z prednášok, na stránke predmetu)

Okruhy:

1. určitý integrál – substitúcia, per partes
2. plocha elementárnej oblasti
3. objem elementárnej oblasti rotujúcej okolo osi x
4. parciálne derivácie prvého rádu funkcie o dvoch premenných, dotyková rovina ku grafu funkcie v danom bode
5. lokálne extrémny funkcie
6. lokálne viazané extrémny funkcie

Doniesť: dvojhárok s vytlačenou hlavičkou, ISIC, písacie potreby

Prvý opravný termín:

oprava prvej zápočtovej písomky: 30. 5. 2025, P25

oprava druhej zápočtovej písomky: 5. 6. 2025, P25