

NMPaMŠ – 12.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Pr. 1:

(f) Daná je funkcia:
$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b \cdot (x^2 - 1), & \text{ak } 1 \leq x \leq 3, \\ c, & \text{ak } x > 3. \end{cases}$$

- Stanovte parametre a, b tak, aby $F(x)$ bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej X .
- Určte hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ náhodnej premennej X .
- Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej X .
- Vypočítajte pravdepodobnosť $P(0 \leq X < 2)$.

(i)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} a = 0 \Rightarrow \underline{\underline{a = 0}}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} c = 1 \Rightarrow \underline{\underline{c = 1}}$$

$$x = 1 \quad b(1 - 1) = 0 \\ b \cdot 0 = 0$$

$$x = 3 \quad b(9 - 1) = 1 \\ b = \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ \frac{1}{8}(x^2 - 1) & 1 \leq x \leq 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

(ii)

$$f(x) = F'(x)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} 2x = \frac{x}{4} & x \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & x \notin \langle 1, 3 \rangle \end{cases}$$

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

(iii)

$$\begin{aligned} E(x) &= \int_{-\infty}^1 0 \cdot x dx + \int_1^3 \frac{x}{4} x dx + \int_3^{\infty} 0 dx = \int_1^3 \frac{x^2}{4} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{12} \right]_1^3 = \frac{27}{12} - \frac{1}{12} = \frac{26}{12} = \underline{\underline{\frac{13}{6}}} \end{aligned}$$

(iv)

$$P(0 \leq x < 2) = \int_0^1 0 dx + \int_1^2 \frac{1}{4} x dx = 0 + \left[\frac{x^2}{8} \right]_1^2 = \frac{4}{8} - \frac{1}{8} = \underline{\underline{\frac{3}{8}}}$$

Rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

Exponenciálne rozdelenie

Dané $\lambda \in \mathbb{R}^+$ (v príkladoch zadané ako **stredná, priemerná hodnota**).

Distribučná funkcia

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0 \\ 1 - e^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0 \end{cases}$$

označenie $X \sim \exp(\lambda)$

Stredná hodnota

Disperzia (rozptyl)

Smerodajná odchýlka

$$E(X) = \lambda, \quad D(X) = \lambda^2 \quad a \quad \sigma(X) = \lambda.$$

Pr. 2:

- (a) Priemerná doba životnosti súčiastky je 600 hodín. Doba životnosti má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraná súčiastka bude fungovať
- menej ako 800 hodín,
 - viac ako 500 hodín,
 - viac ako 600, ale menej ako 700 hodín.
 - Určte takú hodnotu t , že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako t hodín, je 0,9.

i)

$$\lambda = 600 \quad X \sim \text{exp}(600)$$

$$P(X < 800) = F(800) = 1 - e^{-\frac{800}{600}} \approx 0,7364$$

$$F(x) = P(X \leq x) \rightarrow P(X \leq x) = F(x)$$

ii)

$$P(X > 500) = 1 - F(500) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{500}{600}}\right) = 0,4346$$

iii)

$$P(600 < X < 700) = F(700) - F(600) = 1 - e^{-\frac{700}{600}} - \left(1 - e^{-\frac{600}{600}}\right) = 0,0564$$

iv)

$$P(X > t) = 0,9$$

$$1 - F(X < t) = 0,9$$

$$1 - 0,9 = F(X < t)$$

$$1 - 0,9 = 1 - e^{-\frac{t}{600}}$$

$$0,9 = e^{-\frac{t}{600}}$$

$$t = -600 \cdot \ln 0,9 = 63,27 \text{ hod.}$$

Rozdelenia pravdepodobnosti spojitej náhodnej premennej

Normálne rozdelenie

Dané $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$ (v príkladoch zadané ako **stredná hodnota**, **smerodajná odchýlka**).

označenie $X \sim \text{norm}(\mu, \sigma)$

Distribučná funkcia – $F(x)$

Normovanie náhodnej premennej X pre normálne rozdelenie, po normovaní nová náhodná premenná Y

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \quad Y \sim \text{norm}(0, 1)$$

Distribučná funkcia normovaného normálneho rozdelenia – $\Phi(Y)$

Vlastnosti $\Phi(Y)$ $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ pre každé $y \in \mathbb{R}$.

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

$$P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right)$$

Pr. 3:

(b) Výška dospelého muža má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 177 cm smerodajnou odchýlkou 5 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že

- náhodne vybraný muž má výšku menšiu ako 180 cm,
- náhodne vybraný muž má výšku väčšiu ako 170 cm,
- náhodne vybraný muž má výšku v intervale $\langle 165 \text{ cm}, 192 \text{ cm} \rangle$.

$$\mu = 177 \text{ cm}, \quad \sigma = 5 \text{ cm}$$

$$i. \quad P(X < 180 \text{ cm}) = F(180) = \Phi\left(\frac{180 - 177}{5}\right) = \Phi(0,6) = 0,72575$$

$$ii. \quad P(X > 160 \text{ cm}) = 1 - P(X < 160) = 1 - F(160) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{160 - 177}{5}\right) = 1 - \Phi(-1,4) =$$

$$= 1 - (1 - \Phi(1,4)) = \Phi(1,4) = 0,91924$$

hodnotu
určíme z

tab. pre
distribučnú
funkciu Φ
normálneho

rozdelenia

iii.

$$P(165 < X < 192 \text{ cm}) = F(192) - F(165) =$$

$$= \Phi\left(\frac{192 - 177}{5}\right) - \Phi\left(\frac{165 - 177}{5}\right) =$$

$$= \Phi(3) - \Phi(-2,4) = \Phi(3) - (1 - \Phi(2,4)) =$$

$$= 0,99865 - 1 + 0,9918 = 0,99045$$

Matematická štatistika

Triedenie dát:

- **Prosté triedenie** – usporiadanie podľa veľkosti $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$, kde x_i sú namerané hodnoty.
- **Triedenie podľa početnosti** – pre každú nameranú hodnotu x_j je n_j počet výskytov hodnoty x_j medzi nameranými hodnotami, napr.

x_j	167	170	174	175	178	180
n_j	1	3	5	6	3	2

Výberový priemer náhodného výberu V_n je číslo

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad \text{pre prosté triedenie,}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^k n_j x_j \quad \text{pre triedenie podľa početnosti. } (n = \sum_{j=1}^k n_j)$$

Modifikovaný výberový rozptyl (disperzia) náhodného výberu V_n je číslo

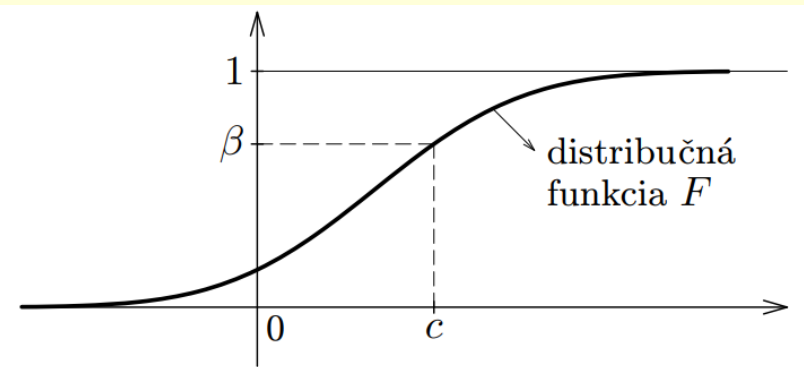
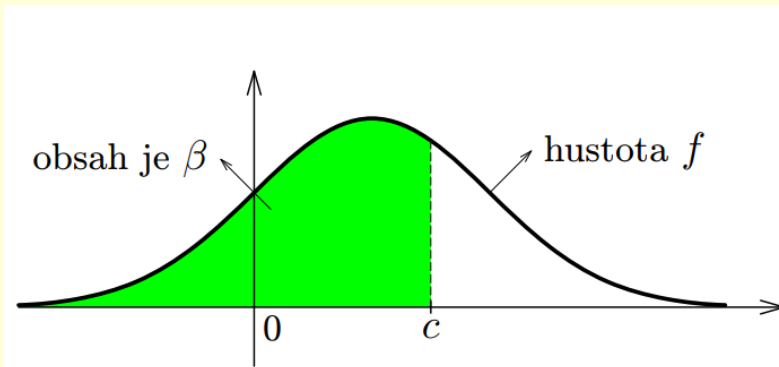
$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad \text{pre prosté triedenie,}$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^k (x_j - \bar{x})^2 n_j \quad \text{pre triedenie podľa početnosti.}$$

Modifikovaná výberová odchýlka náhodného výberu V_n je číslo $s^* = \sqrt{s^{*2}}$

β - kvantil

Najmenšie reálne číslo c , že $F(c) \geq \beta$ nazývame β -kvantilom rozdelenia pravdepodobnosti F a označujeme ho $c = F^{-1}(\beta)$.



RP – rozdelenie pravdepodobnosti

DF – distribučná funkcia

NP - náhodná premenná

β – kvantil = hodnota z tabuľky

Názov RP	NP	DF	β -kvantil
Normovaná normálna	Y	Φ	$\Phi^{-1}(\beta) = y_\beta$
Chí-kvadrát	χ^2	χ_n^2	$\chi_{\beta,n}^2$
Studentovo t	T	t_n	$t_{\beta,n}$
Fisherovo	F	$F_{n,m}$	$F_{\beta;n,m}$

Intervaly spoľahlivosti

Hladina významnosti α - pravdepodobnosť, že náš štatistický záver je chybný, $\alpha \in (0,1)$

Intervalový odhad Q na hladine významnosti α - číselný interval $\langle Q_1, Q_2 \rangle$, v ktorom leží Q s pravdepodobnosťou $1 - \alpha$

$1 - \alpha$ - koeficient spoľahlivosti intervalového odhadu $\langle Q_1, Q_2 \rangle$

a) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - známe)

Obojstranný interval

$$\mu \in \left\langle \underbrace{\bar{x}}_{\text{výberový priemer}} - \underbrace{y_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{počet prvkov}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \underbrace{y_{1-\frac{\alpha}{2}}}_{\text{počet prvkov}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

S^*

Ľavostranný interval

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - \underbrace{y_{1-\alpha}}_{\text{počet prvkov}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \infty \right), \quad \text{resp.} \quad \mu \in \left(-\infty, \bar{x} + \underbrace{y_{1-\alpha}}_{\text{počet prvkov}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right)$$

Pravostranný interval

β - kvantil pre normálne rozdelenie - hodnota z tabuľky

b) Intervaly spoľahlivosti pre μ (σ - neznáme)

Obojstranný interval

$$\mu \in \left\langle \bar{X} - \underbrace{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}_{\text{green wavy}}, \bar{X} + \underbrace{t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}_{\text{green wavy}} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

s*

Ľavostranný interval

$$\mu \in \left\langle \bar{X} - \underbrace{t_{1-\alpha, n-1}}_{\text{green wavy}}, \infty \right), \text{ resp. } \mu \in \left(-\infty, \bar{X} + \underbrace{t_{1-\alpha, n-1}}_{\text{green wavy}} \cdot \frac{s^*}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

Pravostranný interval

β – kvantil pre Studentovo rozdelenie - hodnota z tabuľky

b) Intervaly spoľahlivosti pre σ^2 (μ - neznáme)

Obojstranný interval

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1) \cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1) \cdot s^{*2}}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right\rangle$$

Ľavostranný interval

$$\sigma^2 \in \left\langle \frac{(n-1) \cdot s^{*2}}{\chi^2_{1-\alpha, n-1}}, \infty \right\rangle$$

Pravostranný interval

$$\sigma^2 \in \left(0, \frac{(n-1) \cdot s^{*2}}{\chi^2_{\alpha, n-1}} \right)$$

β – kvantil pre χ^2 rozdelenie - hodnota z tabuľky

Pr. 4:

(a) Kontrolór nameral nasledujúce hodnoty objemu fliaš Coca-Coly:

0,49; 0,5; 0,48; 0,47; 0,505; 0,485; 0,49; 0,495; 0,5; 0,48.

- Určte 95%-ný obojstranný interval spoľahlivosti pre strednú hodnotu a disperziu.
- Nájdite 99%-ný ľavostranný interval spoľahlivosti pre disperziu.
- Na hladine významnosti 0,05 otestujte hypotézu $H_0 : \mu = 0,5$ oproti hypotéze $H_1 : \mu < 0,5$.

rozdeľenie podľa počtu

x_i	n_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 \cdot n_i$
0,47	1	$3,8025 \cdot 10^{-4}$	$3,8025 \cdot 10^{-4}$
0,48	2	$0,9025 \cdot 10^{-4}$	$1,805 \cdot 10^{-4}$
0,485	1	$0,2025 \cdot 10^{-4}$	$0,2025 \cdot 10^{-4}$
0,49	2	$0,0025 \cdot 10^{-4}$	$0,005 \cdot 10^{-4}$
0,495	1	$0,3025 \cdot 10^{-4}$	$0,3025 \cdot 10^{-4}$
0,5	2	$1,1025 \cdot 10^{-4}$	$2,205 \cdot 10^{-4}$
0,505	1	$2,4025 \cdot 10^{-4}$	$2,4025 \cdot 10^{-4}$

i

$$n = 10$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{10} x_i \cdot n_i = 0,4895$$

$$s^{*2} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 n_i$$

$$= 0,00011916$$

$$s = s^* = \sqrt{s^{*2}} = 0,0109161$$

$$\mu \in \left\langle \bar{x} - t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{x} + t_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right\rangle$$

μ - 2 n'ime, s - n'e n'ime

$$\mu \in \left\langle 0,4895 - 2,2622 \cdot \frac{0,01092}{\sqrt{10}}, 0,4895 + 2,2622 \cdot \frac{0,01092}{\sqrt{10}} \right\rangle$$

$$1 - \alpha = 0,95$$

$$\alpha = 0,05$$

$$\mu \in \langle 0,48168, 0,497311 \rangle$$

$$t_{1-\frac{0,05}{2}, 10-1} = t_{0,975, 9} = 2,2622 \rightarrow \text{z tab'ly, s-kvantil}$$

Studentov-t rozdel.

$$\delta^2 \in \left(\frac{(n-1) \textcircled{542} \delta^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1}}, \frac{(n-1) \textcircled{542} \delta^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1}} \right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{0,05}{2} = 0,025 \quad \delta^2 \in (0,00005637, 0,000397144)$$

$$\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0,975, 9} = 19,023$$

$$\chi^2_{\frac{\alpha}{2}, n-1} = \chi^2_{0,025, 9} = 2,7004$$

2-tailige 15-Quantil
 χ^2 -Verteilung