NMPaMŠ – 5.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerický výpočet určitého integrálu

1. Lichobežníková metóda

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou s presnosťou ε = 0,05.

$$\int_1^4 \sqrt{x}\,\mathrm{d}x$$

1. **Zvolíme interval $\langle a, b\rangle$, vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby pre určenie delenia n intervalu $\langle a, b\rangle$**

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle$$

$$M_2 \geq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$$

$$f(x) = \sqrt{x}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}$$

$$M_2 = \max_{x\in\langle 1,4\rangle} \left| -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \right|$$

$x = 1,\quad M_2 = 0{,}25$

$x = 4,\quad M_2 = 0{,}03125$

Poznámka: M_2 môžeme rátať, iba ak je $f''(x)$ monotónna na danom intervale (rastúca alebo klesajúca) , v tomto prípade je klesajúca, potom stačí urobiť výpočet pre x = 1.

horný odhad chyby

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon$$

$$\frac{(4-1)^3}{12n^2} 0{,}25 \leq 0{,}05$$

$$\frac{(4-1)^3}{12.0{,}05} 0{,}25 \leq n^2$$

$$11{,}25 \leq n^2$$

$$3{,}35 \leq n$$

2. Určíme *n* delení intervalu a krok delenia *h*

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{4-1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$3{,}35 \leq n \rightarrow \boldsymbol{n = 4}\ \textit{najbližšie celé číslo}$$

3. Urobíme tabuľku s *n* delením intervalu $\langle a,b\rangle$, určíme x_i, $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	a = 1	1
1	$1+\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$	1,323
2	$\frac{10}{4}$	1,581
3	$\frac{13}{4}$	1,803
4 = n	b = 4	4

$$x_{i+1}=x_i+h \qquad f(x_i)=\sqrt{x_i}$$

4. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n)=\frac{h}{2}\cdot\left[f(a)+f(b)+2\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)\right]$$

$$L(4)=\frac{\frac{3}{4}}{2}[1+\ 2+\ 2.\ 4{,}707]=4{,}65525$$

5. Zapíšeme výsledok vzhľadom na presnosť ε

$L(4)\approx 4{,}66$ ε = 0,05

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou, ak je dané $n = 6$ a odhadnite chybu výpočtu.

$$\int_{4}^{6,4} \ln x \, \mathrm{d}x$$

1. Určíme krok delenia *h*

2. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		

3. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

4. Vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby

$$M_2 \geq \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|$$

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2$$

Poznámka: M_2 môžeme rátať, iba ak je $f''(x)$ monotónna na danom intervale (rastúca alebo klesajúca)

5. Zapíšeme výsledok

Pr. 3: Vypočítajte daný integrál lichobežníkovou metódou s presnosťou $\varepsilon = 0{,}02$.

$$\int_1^4 \frac{1}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$$

1. **Zvolíme interval $\langle a, b\rangle$, vypočítame hodnotu M_2 a horný odhad chyby pre určenie delenia *n* intervalu**

$$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle = \langle \mathbf{1}, \mathbf{4}\rangle$$

$$f(x) = (1+x)^{-2}$$

$$f'(x) = (-2)(1+x)^{-3}$$

$$f''(x) = 6(1+x)^{-4}$$

$$M_2 \geq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$$

$$M_2 = \max_{x\in\langle 1,4\rangle} \left|6\frac{1}{(x+1)^4}\right| \qquad \begin{array}{ll} x = 1, & M_2 = 0{,}375 \\ x = 4, & M_2 = 0{,}0096 \end{array}$$

M_2 môžeme rátať, $f''(x)$ je klesajúca na danom interval

horný odhad chyby

$$|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} M_2 \leq \varepsilon$$

$$\frac{(4-1)^3}{12n^2} 0{,}375 \leq 0{,}02$$

$$\frac{(4-1)^3}{12.0{,}02} 0{,}375 \leq n^2$$

$$6{,}49 \leq n \quad \rightarrow \boldsymbol{n} = \mathbf{7}\ \textit{najbližšie celé číslo}$$

2. Určíme krok delenia *h*

$$h = \frac{b-a}{n} \qquad h = \frac{4-1}{7} = \frac{3}{7}$$

3. Urobíme tabuľku s *n* delením intervalu, určíme x_i , $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	0,25
1	$\frac{10}{7}$	0,1696
2	$\frac{13}{7}$	0,1225
3	$\frac{16}{7}$	0,0926
4	$\frac{19}{7}$	0,0725
5	$\frac{22}{7}$	0,0583
6	$\frac{25}{7}$	0,0479
7	4	0,04

$$x_{i+1} = x_i + h \rightarrow x_1 = 1 + \frac{3}{7} = \frac{10}{7}$$

$$f(x_i) = \frac{1}{(1+x_i)^2}$$

$$\sum_{i=1}^{6} f(x_i) = 0{,}5634$$

$$f(1) = 0{,}25,\ f(4) = 0{,}04$$

4. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]$$

$$L(7) = \frac{\overset{h}{\frac{3}{7}}}{2}\left[\underbrace{0{,}25}_{f(a)} + \underbrace{0{,}04}_{f(b)} + 2.\ \underbrace{0{,}5634}_{\sum_{i=1}^{6} f(x_i)}\right] = 0{,}3036$$

$\downarrow$

vzhľadom na ε

5. Zapíšeme výsledok

$$\boldsymbol{L(7) = 0{,}30}$$

Dú:Príklady na riešenie 1: E / 1 – 5, F / 1 - 5