NMPaMŠ – 6.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Numerický výpočet určitého integrálu

2. Simpsonova metóda

Pri tejto metóde je

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\mathrm{d}x \approx \frac{h}{3}[f(x_i) + 4f(x_{i+1}) + 2f(x_{i+2})]$$

nazývame ho **elementárny vzorec.**

Pr. 1: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre n = 10 delení a urobte odhad chyby výpočtu

$$\int_0^5 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

1. Určíme krok delenia *h*

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{5-0}{10} = 0{,}5$$

2. Urobíme tabuľku s n delením intervalu, určíme x_i, $f(x_i)$

i	x_i	$f(x_i)$
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

3. Vypočítame integrál

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3} \cdot \left[f(a) + f(b) + 4 \cdot \sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i}) \right]$$

4. Vypočítame M_4

$$M_4 \geq \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f^{(4)}(x)|$$

Poznámka: M_4 môžeme rátať, iba ak je $f^{(4)}(x)$ monotónna na danom intervale (rastúca alebo klesajúca)

5. Horný odhad chyby

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 n^4}$$

Pr. 2: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre n = 6 delení a urobte odhad chyby výpočtu. V tabuľke zaokrúhľujte na 5 desatinných miest.

$$\int_0^1 e^x \, dx$$

$a = 0$, $b = 1$, $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1}{6}$

i	x_i	$f(x_i) = e^x$
0	0	1
1	1/6	1,18136
2	2/6	1,39561
3	3/6	1,64872
4	4/6	1,94773
5	5/6	2,30098
6	1	2,71828

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a)+f(b)+4\cdot\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right]$$

$$S(6) = \frac{1}{18}[1 + 2{,}71828 + 4.5{,}13106 + 2.3{,}34334] = 1{,}71829$$

$$M_4 \geq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|$$

$$M_4 \geq \max_{x\in\langle 0,1\rangle} |e^x| = 2{,}71829$$

$$f(x) = e^x$$

$$f^4(x) = e^x$$

M_4 môžeme rátať, $f^{(4)}(x)$ je rastúca na danom intervale, stačí výpočet pre x = 1

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}$$

$$|R_s(n)| \leq \frac{(1-0)^5 .\, 2{,}17829}{180.\, 6^4} = 0{,}00001$$

$\int_0^1 e^x\,\mathrm{d}x \approx S(6) = 2{,}71829$ s chybou $0{,}00001$

Pr. 3: Vypočítajte daný integrál Simpsonovou metódou pre n = 8 delení a urobte odhad chyby výpočtu.

$$\int_1^3 \sqrt{1+2x}\,\mathrm{d}x$$

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-1}{8} = \frac{1}{4}$$

i	x_i	$f(x_i)$
0	1	1,73205
1	$\frac{5}{4}$	1,87083
2	$\frac{6}{4}$	2
3	$\frac{7}{4}$	2,12132
4	$\frac{8}{4}$	2,23607
5	$\frac{9}{4}$	2,34521
6	$\frac{10}{4}$	2,44949
7	$\frac{11}{4}$	2,54951
8	3	2,64576

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a)+f(b)+4\cdot\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right]$$

$$S(8) = \frac{1}{12}[1{,}73205 + 2{,}64576 + 4.8{,}88687 + 2.6{,}68556] = 4{,}4413675$$

$$M_4 \geq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|$$

$$M_4 \geq \max_{x\in\langle 1,3\rangle} \left|-15(1+2x)^{-\frac{7}{2}}\right| = 0{,}3208$$

M_4 môžeme rátať, $f^{(4)}(x)$ je klesajúca na danom intervale, stačí výpočet pre x = 1

$$|R_s(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180n^4}$$

$$|R_s(8)| \leq \frac{(3-1)^5 . 0{,}3208}{180. 8^4} = 0{,}000014$$

$$f(x) = \sqrt{1+2x} \quad = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{1}{2}}.2$$

$$f''(x) = -\frac{1}{2}(1+2x)^{-\frac{3}{2}}.2$$

$$f^{(3)}(x) = \frac{3}{2}(1+2x)^{-\frac{5}{2}}.2$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{15}{2}(1+2x)^{-\frac{7}{2}}.2 = -15(1+2x)^{-\frac{7}{2}}$$

$\int_0^1 \sqrt{1+2x}\mathrm{d}x \approx S(8) = 4{,}441368$ s chybou $0{,}000014$

Dú:Príklady na riešenie 1: G / 1 – 5