

Lineárne a kvadratické rovnice

Rovnica je zápis rovnosti dvoch výrazov (tzv. **ľavá**, resp. **pravá strana rovnice**), v ktorom treba určiť hodnotu premennej z daného číselného oboru tak, aby sme po dosadení tejto hodnoty premennej do rovnice dostali pravdivý výrok. Ak napr. x je označenie premennej a výraz $L(x)$, resp. $P(x)$, je ľavou, resp. pravou stranou, tak pod rovnicou rozumieme zápis

$$L(x) = P(x). \quad (1)$$

Číselný obor, v ktorom hľadáme túto hodnotu premennej, nazývame **obor riešenia rovnice** $\mathcal{O}$ (**obor premennej** $\mathcal{O}$)¹. Premennú v rovnici nazývame **neznáma**, hodnotu premennej (číslo), pre ktorú sa obidva výrazy rovnajú, nazývame **koreň rovnice v množine** $\mathcal{O}$. Namiesto termínu koreň rovnice často používame termín **riešenie rovnice**. Pod riešením rovnice rozumieme aj postup, ktorým hľadáme koreň rovnice. Množinu všetkých koreňov rovnice (v danom obore premennej $\mathcal{O}$) označujeme písmenom $\mathcal{K}$. Teda ak $\mathcal{D}$ je množina, na ktorej sú definované oba výrazy $L(x)$ a $P(x)$, tak koreňom rovnice (1) je každé číslo $a \in \mathcal{O} \cap \mathcal{D}$, pre ktoré platí rovnosť

$$L(a) = P(a).$$

Pri hľadaní koreňov (t. j. pri riešení rovnice) rovnicu upravujeme tzv. **dôsledkovými (implikačnými) úpravami** na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$. Najbežnejšie dôsledkové úpravy rovníc sú:

1. Vzájomná výmena strán rovnice.
2. Nahradenie ľubovoľnej strany rovnice výrazom, ktorý sa jej rovná na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$.
3. Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$, k obidvom stranám rovnice.
4. Vynásobenie obidvoch strán rovnice výrazom, ktorý
 - a) je definovaný na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$,
 - b) nadobúda nenulové hodnoty na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$.
5. Umocnenie obidvoch strán rovnice
 - a) na druhú, tretiu, štvrtú, atď.
 - b) na druhú, štvrtú, šiestu atď., ak obe strany rovnice nadobúdajú na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$ nezáporné hodnoty.
6. Odmocnenie obidvoch strán rovnice, ak obe strany nadobúdajú na množine $\mathcal{O} \cap \mathcal{D}$ nezáporné hodnoty.

Vyššie uvedené úpravy (okrem úprav 4a, 5a) patria medzi tzv. **ekvivalentné úpravy rovnice**.

Poznámka 1 *Samotný postup pri hľadaní koreňov danej rovnice môžeme rozložiť na tieto tri časti:*

- *Od danej rovnice sa usilujeme prejsť rôznymi dôsledkovými úpravami k rovnici, ktorej riešenie je zrejmé.*

¹Nás bude zaujímať hlavne prípad $\mathcal{O}=\mathbb{R}$ a na záver prípad $\mathcal{O}=\mathbb{C}$.

- Nech $\mathcal{A}$ je množina všetkých koreňov rovnice, ktorú sme dostali z pôvodnej rovnice pomocou dôsledkových úprav a $\mathcal{K}$ je množina všetkých koreňov pôvodnej rovnice. Potom $\mathcal{K} \subset \mathcal{A}$, kde množinu $\mathcal{A}$ poznáme.
- Urobíme tzv. „skúšku správnosti“, ktorej cieľom je zistiť, ktoré z prvkov množiny $\mathcal{A}$ sú z množiny $\mathcal{K}$, t. j. ktoré z nich sú riešeniami (koreňmi) pôvodnej rovnice. Skúšku urobíme tak, že postupne dosadíme každý prvok x z množiny $\mathcal{A}$ do oboch strán **pôvodnej** rovnice. Ak zistíme, že $L(x) = P(x)$, kde $L(x)$, resp. $P(x)$, je hodnota ľavej, resp. pravej strany rovnice v čísle x , tak x je koreňom pôvodnej rovnice (t. j. $x \in \mathcal{K}$). V opačnom prípade $x \notin \mathcal{K}$.

Pripomíname, že ak pri riešení rovnice použijeme len ekvivalentné úpravy, tak $\mathcal{K} = \mathcal{A}$ a skúška nie je potrebná². Pri zápisoch výsledkov cvičení je uvádzaná množina $\mathcal{K}$, napr. $\mathcal{K} = \{\pm 4\}$ (tu nie je dôležité označenie neznámej) alebo sú uvedené všetky možné hodnoty riešenia úlohy (napr. $x = \pm 4$).

Definícia 1 Rovnicu $ax + b = 0$, kde a, b sú reálne čísla, $a \neq 0$, x je neznáma z daného číselného oboru, nazývame **lineárnou rovnicou** s reálnymi koeficientmi a, b , alebo krátko – **lineárna rovnica**.

Táto rovnica má v $\mathbb{R}$ jediný koreň

$$x = -\frac{b}{a}, \quad \text{t. j.} \quad \mathcal{K} = \left\{ -\frac{b}{a} \right\}.$$

Definícia 2 Rovnicu $ax^2 + bx + c = 0$, kde a, b, c sú reálne čísla, $a \neq 0$, x je neznáma z daného číselného oboru, nazývame **kvadratickou rovnicou** s reálnymi koeficientmi a, b, c , alebo krátko – **kvadratická rovnica**.

Výraz ax^2 nazývame **kvadratickým členom**, bx **lineárnym členom** a c **absolútnym členom** kvadratickej rovnice. Výraz $D = b^2 - 4ac$ nazývame **diskriminantom** danej kvadratickej rovnice. Ak neznáma x je z množiny $\mathbb{R}$, tak platí:

- ak $D > 0$, tak $\mathcal{K} = \left\{ \frac{-b + \sqrt{D}}{2a}; \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} \right\}$, t. j. rovnica má dva rôzne korene;
- ak $D = 0$, tak $\mathcal{K} = \left\{ \frac{-b}{2a} \right\}$, t. j. rovnica má jeden koreň;
- ak $D < 0$, tak $\mathcal{K} = \emptyset$, t. j. rovnica nemá reálny koreň.

Ak označíme korene kvadratickej rovnice symbolmi x_1, x_2 , tak

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \quad (2)$$

Poznamenávame, že ak $D = b^2 - 4ac = 0$, tak kvadratická rovnica má v $\mathbb{R}$ jediný tzv. **dvojnásobný koreň** (vtedy v (2) je $x_1 = x_2$). Ak $D < 0$, tak kvadratická rovnica nemá reálny koreň, ale má dva korene v množine komplexných čísel, ktoré sú určené vzorcom

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{-D}}{2a}, \quad (3)$$

kde i je imaginárna jednotka (pozri kapitolu o komplexných číslach).

²Ale môže byť užitočná, lebo sme mohli urobiť nejakú chybu v úpravách.

Príklad 1 Vyriešme v $\mathbb{R}$ rovnice:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \frac{7x-1}{3} + \frac{5+3x}{2} = 5x-6; & \text{b)} \frac{2y-1}{2y+1} = \frac{2y+1}{2y-1} - \frac{8}{4y^2-1}; \\ \text{c)} \frac{2s-5}{s-1} = \frac{5s-3}{3s+5}; & \text{d)} \sqrt{x} \cdot \sqrt{x-2} = 3; \quad \text{e)} \frac{x+3}{x^2-1} = \frac{2}{x^2-1}. \end{array}$$

Riešenie.

a) Úpravami danej rovnice dostaneme (určte typ úprav!)

$$\begin{aligned} 2(7x-1) + 3(5+3x) &= 6(5x-6); \\ 14x-2+15+9x &= 30x-36; \\ 49 &= 7x; \\ x &= 7. \end{aligned}$$

Použili sme len ekvivalentné úpravy, ale napriek tomu urobíme skúšku správnosti:

$$\begin{aligned} \text{skúška: } L(7) &= \frac{7 \cdot 7 - 1}{3} + \frac{5 + 3 \cdot 7}{2} = 16 + 13 = 29; \\ P(7) &= 5 \cdot 7 - 6 = 29. \end{aligned}$$

Preto $\mathcal{K} = \{7\}$.

b) Definičný obor danej rovnice je množina $\mathcal{D} = \mathbb{R} - \{\pm 0,5\}$. Obidve strany rovnice vynásobíme výrazom $(2y+1)(2y-1)$ a dostaneme

$$\begin{aligned} (2y-1)^2 &= (2y+1)^2 - 8; \\ 4y^2 - 4y + 1 &= 4y^2 + 4y + 1 - 8; \\ 8y &= 8; \\ y &= 1. \end{aligned}$$

Keďže $1 \in \mathcal{D}$, tak $\mathcal{K} = \{1\}$. Tento záver sme mohli dostať aj na základe poznámky 1. V tom prípade by sme nemuseli určovať množinu $\mathcal{D}$, ale stačilo by overiť, či pre danú rovnicu platí rovnosť $L(1) = P(1)$.

c) Rovnicu vynásobíme výrazom $(s-1)(3s+5)$, pričom nebudeme skúmať, či ide o ekvivalentnú úpravu. Potom

$$\begin{aligned} 6s^2 - 5s - 25 &= 5s^2 - 8s + 3; \\ s^2 + 3s - 28 &= 0, \end{aligned}$$

čo je kvadratická rovnica s koeficientmi $a = 1$, $b = 3$ a $c = -28$, ktorej diskriminant je $D = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-28) = 121$. Teda podľa (2)

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm 11}{2} = \begin{cases} 4; \\ -7. \end{cases}$$

Skúškou správnosti sa ľahko presvedčíme, že $\mathcal{K} = \{4; -7\}$.

- d) Použijeme poznámku 1 (t. j. nebudeme skúmať, či použité úpravy sú ekvivalentné a ani $\mathcal{D}$ – definičný obor rovnice nás nebude „trápiť“): ak umocníme obidve strany rovnice na druhú, tak dostaneme

$$\begin{aligned}x(x-2) &= 9; \\x^2 - 2x - 9 &= 0.\end{aligned}$$

Opäť sme získali kvadratickú rovnicu, ktorej diskriminant je

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-9) = 40$$

a na základe (2) je

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 2\sqrt{10}}{2} = \begin{cases} 1 + \sqrt{10}, \\ 1 - \sqrt{10}. \end{cases} \quad (4)$$

Teraz je skúška správnosti nevyhnutná! Overte, že

$$1 - \sqrt{10} \notin \mathcal{K} \quad \text{a} \quad \mathcal{K} = \{1 + \sqrt{10}\}.$$

Keby sme príklad riešili cez definičný obor rovnice, tak by sme mohli postupovať takto: výraz $\sqrt{x}$ je definovaný pre $x \geq 0$ a výraz $\sqrt{x-2}$ pre $x \geq 2$. Teda definičným oborom danej rovnice je množina $\mathcal{D} = \langle 2; \infty \rangle$. Teraz by sme sa tými istými úpravami ako predtým dopracovali k „možným“ koreňom rovnice z (4). Keďže $1 - \sqrt{10} \notin \mathcal{D}$ a $1 + \sqrt{10} \in \mathcal{D}$, tak $\mathcal{K} = \{1 + \sqrt{10}\}$.

- e) Obe strany rovnice vynásobíme výrazom $x^2 - 1$. Dostaneme $x + 3 = 2$, t. j. $x = -1$. Skúškou ľahko overíme, že číslo -1 nie je koreňom danej rovnice lebo $-1 \notin \mathcal{D}$, a preto $\mathcal{K} = \emptyset$. $\square$

Pri riešení rovnice používame také úpravy, ktoré nám zabezpečia to, aby každý koreň rovnice bol súčasne aj koreňom upravenej rovnice (tá môže mať aj viac koreňov). Je potrebné dávať pozor na také úpravy, pri ktorých by sa korene „strácali“. Napríklad rovnica

$$(x+1)^2 = (x+1)(3-x)$$

má korene $\mathcal{K} = \{1; -1\}$; ak túto rovnicu upravíme tak, že obidve strany delíme výrazom $x+1$, tak dostaneme rovnicu

$$x+1 = 3-x,$$

pre ktorú $\mathcal{K} = \{1\}$. Pri delení sme vykonali úpravu, ktorou sme koreň $x = -1$ „stratili“³.

Príklad 2 Vyriešme v množine komplexných čísel rovnicu $x^2 + 6x + 18 = 0$.

Riešenie. Máme kvadratickú rovnicu so záporným diskriminantom

$$D = b^2 - 4ac = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 18 = -36,$$

preto podľa (3)

$$x_{1,2} = \frac{-6 \pm i\sqrt{36}}{2} = -3 \pm 3i,$$

³Pretože pre $x = -1$ sme delili nulou!

a teda $\mathcal{K} = \{-3 + 3i; -3 - 3i\}$. □

Medzi koreňmi kvadratickej rovnice a jej koeficientmi existuje určitý súvis. Napríklad pre kvadratickú rovnicu $x^2 + px + q = 0$ platí: x_1, x_2 sú korene rovnice práve vtedy, keď platí

$$x_1 + x_2 = -p \quad \text{a} \quad x_1 \cdot x_2 = q. \quad (5)$$

Vyplýva to z rozkladu trojčlenu $x^2 + px + q$ na súčin (nazývaný *súčin koreňových činiteľov*)

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Príklad 3 V rovnici $x^2 + px + q = 0$ určme čísla p a q tak, aby boli súčasne koreňmi tejto rovnice.

Riešenie. Pre čísla p a q musí platiť (stačí si uvedomiť, že v (5) je napr. $x_1 = p$ a $x_2 = q$):

$$p + q = -p \quad \text{a} \quad p \cdot q = q.$$

Z prvej rovnice je $q = -2p$ a po dosadení do druhej rovnice dostaneme rovnicu $p \cdot (-2p) = -2p$. Jej riešením je $p = 0$ alebo $p = 1$. Odtiaľ $q = 0$ (ak $p = 0$) alebo $q = -2$ (ak $p = 1$). Výsledok môžeme zapísať takto: $[p, q] \in \{[0, 0]; [1, -2]\}$. □

Úlohy

Upravte kvadratický výraz na súčin koreňových činiteľov:

1. $x^2 - 2x + 1;$ $[(x - 1)^2]$
2. $x^2 + 6x + 9;$ $[(x + 3)^2]$
3. $x^2 - 5x + 6;$ $[(x - 2)(x - 3)]$
4. $x^2 + 3x + 2;$ $[(x + 2)(x + 1)]$
5. $x^2 + x - 12;$ $[(x + 4)(x - 3)]$

Rozložte daný výraz na súčin:

1. $x^4 - 2x^2 + 1;$ $[(x^2 - 1)^2 = (x - 1)^2(x + 1)^2]$
2. $x^4 - 8x^2 + 16;$ $[(x^2 - 4)^2 = (x - 2)^2(x + 2)^2]$
3. $x^4 - 18x^2 + 81;$ $[(x^2 - 9)^2 = (x - 3)^2(x + 3)^2]$
5. $x^4 + 18x^2 + 81;$ $[(x^2 + 9)^2 = (x^2 + 9)(x^2 + 9)]$

Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice:

1. $\frac{3-x}{2} - \left(\frac{7-x}{3} - \frac{x+3}{4}\right) + \frac{7-x}{6} - \frac{9+7x}{8} + x = 0;$ [1]
2. $x - \frac{1-3x/2}{4} - \frac{2-x/4}{3} = 2;$ [2]

3. $1 + \frac{x}{1-2x} = \frac{x+3}{2x+1}$; [1/3]
4. $\frac{2}{y-3} - \frac{1}{y+2} = \frac{1}{y+6}$; [-24/7]
5. $\frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x}$; $[\mathcal{K} = \mathbb{R} - \{1; -1\}]$
6. $\frac{2x}{x-2} + \frac{1}{2-x} + 1 = \frac{3x+3}{x-2} + \frac{4}{2-x}$; $[\mathcal{K} = \emptyset]$
7. $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{2(x-3)} + \frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3}$; [2/3]
8. $\frac{5}{x-2} + \frac{3}{x-3} = \frac{7}{x-1}$; $[-3 \pm \sqrt{30}]$
9. $\frac{x}{2x+1} + \frac{1}{1-4x^2} = \frac{3x-1}{6x-3}$; $[\mathcal{K} = \emptyset]$
10. $\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^2 = \left(\frac{2x-1}{x-3}\right)^2$; [-1/3; 2]
11. $\frac{4x-7}{6x-13} = \frac{2x-4}{3x-7}$; [3]
12. $\frac{3}{x+1} = \frac{2}{x+3} + \frac{1}{x-2}$. [17]
13. $\frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1}$; $[\mathcal{K} = \{2\}]$
14. $\frac{3x-2}{x-3} - \frac{x-4}{x+3} = \frac{15x-3}{x^2-9}$; $[\mathcal{K} = \{-5/2\}]$
15. $\left(\frac{x-2}{x+3}\right)^3 - \frac{x+3}{x-2} = 0$; [-1/2]
16. $\frac{21}{x^2-4x+10} - x^2 + 4x = 6$; [3; 1]
-  11. $(x^2+2x)^2 - (x+1)^2 = 55$. [-4; 2]

Vyriešte v $\mathbb{R}$ dané rovnice s neznámou x a parametrom $a \in \mathbb{R}$ (urobte diskusiu o riešení vzhľadom na parameter):

1. $a^3x + 8 - 2a^2x = a^3$; $[x = (a^2 + 2a + 4)/a^2 \text{ pre } a \notin \{0; 2\};$
pre $a = 0$ nemá riešenie; pre $a = 2$ je $\mathcal{K} = \mathbb{R}$]
2. $\frac{a}{ax+1} = \frac{6}{x+2}$; $[x = 2(a-3)/(5a); \text{ pre } a \in \{0; 1/2\} \text{ je } \mathcal{K} = \emptyset]$
3. $x + \frac{1}{x} = a + \frac{1}{a}$; $[x \in \{a, a^{-1}\}; \text{ pre } a = 0 \text{ úloha nemá zmysel}]$
4. $\frac{2x}{x-a} + \frac{12x^2}{a^2-x^2} = \frac{a-x}{a+x}$; $[x = \pm a/3; \text{ pre } a = 0 \text{ je } \mathcal{K} = \emptyset]$
5. $\frac{x+a}{2} - \frac{2}{x+a} = \frac{x-a}{2}$; $[\mathcal{K} = \{(2-a^2)/a\} \text{ pre } a \neq 0; \mathcal{K} = \emptyset \text{ pre } a = 0]$
6. $\frac{ax^2}{x-1} - 2a = a^2 + 1$; $[\mathcal{K} = \{a+1; 1+a^{-1}\} \text{ pre } a \neq 0; \text{ ináč } \mathcal{K} = \emptyset]$

$$7. \quad \frac{x}{a} - \frac{a}{2x} = \frac{2x+a}{2a} - \frac{a}{x}. \quad [x = a \text{ pre } a \neq 0, \text{ ináč nemá zmysel}]$$

Určte číslo $s \in \mathbb{R}$, ak $6x_1 + x_2 = 0$, kde x_1, x_2 sú korene rovnice

$$1. \quad x^2 + 15x + s = 0; \quad [-54]$$

$$2. \quad x^2 - sx - 6 = 0; \quad [\pm 5]$$

$$3. \quad sx^2 - 5x + 2 = 0. \quad [-3]$$

Sústavy lineárnych rovníc

Lineárna rovnica s dvoma neznámymi x, y je každá rovnica, ktorá má tvar

$$ax + by = c, \quad (6)$$

pričom a, b, c sú dané konštanty z daného číselného oboru – bežne ich nazývame **koefficientmi rovnice** a aspoň jedno z čísel a, b je rôzne od nuly. Jej **riešením** je usporiadaná dvojica čísel $[x, y]$, ktoré po dosadení splňajú rovnosť (6). V predchádzajúcich úvahách požadujeme, aby koefficienty a neznáme boli z oboru, v ktorom rovnicu riešime (obyčajne z množiny reálnych čísel).

Pod **sústavou lineárnych rovníc** rozumieme systém lineárnych rovníc typu (6) s rovnakými neznámymi. **Riešením sústavy lineárnych rovníc s dvoma neznámymi** je taká usporiadaná dvojica čísel $[x, y]$, ktorá je riešením každej rovnice sústavy.

Obdobne definujeme **lineárnu rovnicu** a aj **sústavu lineárnych rovníc s n neznámymi** ($n \geq 3$) a ich riešenie, pričom aj metódy na jej získanie sú podobné.

Poznámka 2 *Ak sú všetky koefficienty a neznáme z množiny reálnych čísel, tak sústava lineárnych rovníc môže mať jediné riešenie (pozri príklad 4a), alebo nekonečne mnoho riešení (pozri príklad 4b), alebo nemá riešenie (vyriešte napr. príklad 4b, v ktorom zameňte v tretej rovnici číslo -10 za hociké iné).*

Zápisom $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ označujeme množinu všetkých usporiadaných dvojíc $[x, y]$ reálnych čísel x a y ; podobne označujeme

$$\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{[x, y, z]; x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\},$$

$\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^5$ atď.

Postup, ktorým dostaneme riešenie sústavy lineárnych rovníc, spočíva obyčajne vo vylúčení jednej neznámej v niektorej z rovníc sústavy. Nato slúžia napríklad tieto metódy:

- sčítacia metóda** – rovnice sústavy násobíme vhodne zvolenými číslami tak, aby sa po sčítaní rovníc jedna neznáma vylúčila;
- dosadzovacia metóda** – vyjadríme jednu neznámu z jednej rovnice sústavy a dosadíme do ostatných rovníc sústavy, čím sa táto neznáma z týchto rovníc vylúči.

Príklad 4 *Riešme v $\mathbb{R}^2$, resp. v $\mathbb{R}^3$, sústavy rovníc:*

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 3x - 8y = 15; \\ 2x - 7y = 0. \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} x + 2y - z = 0; \\ 3x + 5y + z = -10; \\ x + y + 3z = -10. \end{array} \end{array}$$

Riešenie.

a) Riešime sčítacou metódou

$3x - 8y = 15$	$/ \cdot 2$	prvú rovnicu násobíme číslom 2
$2x - 7y = 0$	$/ \cdot (-3)$	druhú rovnicu násobíme číslom (-3)
$6x - 16y = 30$		
$-6x + 21y = 0$		
$5y = 30$		obidve rovnice sčítame
$y = 6$		

Ak dosadíme napr. do druhej rovnice $2x - 7y = 0$ za y získanú hodnotu 6, tak dostaneme $2x - 7 \cdot 6 = 0$, t. j. $x = 21$. Riešením sústavy je usporiadaná dvojica $[x, y] = [21; 6]$.

- b) Riešime dosadzovacou metódou. Napr. z prvej rovnice je $x = z - 2y$. Po dosadení za x do druhej a tretej rovnice dostaneme

$$\begin{array}{rcl} 3(z - 2y) + 5y + z & = & -10 \\ (z - 2y) + y + 3z & = & -10 \\ \hline -y + 4z & = & -10 \quad / \cdot (-1) \quad \star \\ -y + 4z & = & -10 \\ \hline 0 & = & 0. \end{array}$$

Sústava má nekonečne veľa riešení. Zvolíme napríklad $z = t$, kde t je ľubovoľné reálne číslo; potom z rovnice označenej symbolom $\star$ dostaneme vzťah $y = 4z + 10 = 4t + 10$. Napokon z prvej rovnice danej sústavy je

$$x = z - 2y = t - 2(4t + 10) = -7t - 20.$$

Všetky riešenia danej sústavy môžeme zapísať v tvare

$$[x, y, z] = [-7t - 20, 4t + 10, t], \quad (7)$$

kde $t \in \mathbb{R}$ je ľubovoľné reálne číslo. Sústava má teda nekonečne veľa riešení. $\square$

Poznámka 3 Ak sústava lineárnych rovníc má nekonečne veľa riešení, tak zápis jej riešenia nie je jednoznačný. Napr. v časti b) predchádzajúceho príkladu by sme mohli zapísať riešenie danej sústavy v podstate nekonečne veľa spôsobmi. Presvedčte sa, že aj

$$[x, y, z] = [-2,5 - 7s, 4s, -2,5 + s], \quad s \in \mathbb{R},$$

je jedna z možností zápisu riešenia tejto sústavy rovníc.

Príklad 5 Dvaja bežci trénujú na uzavretej bežeckej dráhe štadiónu, ktorá je 390 m dlhá. Ak súčasne vyštartujú z jedného miesta, a to každý konštantnou rýchlosťou, a bežia opačnými smermi, tak sa stretnú o 30 sekúnd; ak bežia tým istým smerom, tak sa opäť stretnú o 13 minút. Aká je rýchlosť bežcov?

Riešenie. Nech v_1 je rýchlosť prvého a v_2 rýchlosť druhého bežca (v m/s) a nech napr. $v_1 > v_2$. Prvá podmienka úlohy sa dá vyjadriť rovnicou $(v_1 + v_2) \cdot 30 = 390$ a druhá podmienka rovnicou $(v_1 - v_2) \cdot 13 \cdot 60 = 390$. Po jednoduchšej úprave druhej rovnice dostaneme dve lineárne rovnice, ktoré môžeme vyriešiť napr. sčítacou metódou:

$$\begin{array}{rcl} v_1 + v_2 & = & 13 \\ v_1 - v_2 & = & 0,5 \\ \hline 2v_1 & = & 13,5 \\ v_1 & = & 6,75 \end{array} \quad v_2 = 6,25$$

Rýchlosť prvého bežca je 6,75 m/s a druhého 6,25 m/s. $\square$

Príklad 6 Vyriešme v $\mathbb{R}^2$ sústavu rovníc $ax + y = 1$, $x + ay = 1$ s neznámymi x, y a parametrom $a \in \mathbb{R}$.

Riešenie. Použijeme dosadzovaciu metódu: napr. z prvej rovnice vyjadríme neznámu y . Dostaneme

$$y = 1 - ax \quad (8)$$

a toto vyjadrenie dosadíme do druhej rovnice:

$$x + a(1 - ax) = 1.$$

Na ľavej strane upravíme členy, ktoré obsahujú x , a parameter a „prenesieme“ na pravú stranu:

$$x(1 - a^2) = 1 - a. \quad (9)$$

Teraz stačí deliť obe strany rovnice výrazom $(1 - a^2)$. Po jednoduchšej úprave dostaneme

$$x = \frac{1 - a}{1 - a^2} = \frac{1 - a}{(1 - a)(1 + a)} = \frac{1}{1 + a}.$$

Odtiaľ vzhľadom na (8) je

$$y = 1 - ax = 1 - a \cdot \frac{1}{a + 1} = \frac{1}{a + 1}.$$

Teda

$$[x, y] = \left[\frac{1}{a + 1}; \frac{1}{a + 1} \right]. \quad (10)$$

To ale nie je všetko! Musíme preskúmať, či sme použili len ekvivalentné úpravy. Nie je tomu tak, lebo rovnicu (9) sme delili výrazom $(1 - a^2)$. A deliť nulou nesmieme. Teda riešenie (10) danej sústavy si vyžaduje, aby $(1 - a^2) \neq 0$, t.j. $a \notin \{1, -1\}$

Ak $a = 1$, tak sa presvedčte, že daná **sústava rovníc má nekonečne veľa riešení**, ktoré môžeme zapísať napr. v tvare $[x, y] = [t; 1 - t]$, kde t je ľubovoľné reálne číslo.

Ak $a = -1$, tak daná sústava má tvar $-x + y = 1$, $x - y = 1$. Na prvý pohľad vidno, že táto **sústava nemá riešenie**. Ak to nevidíte, tak sčítajte tieto rovnice: dostanete $0 = 2$, čo nie je pravda. $\square$

Poznámka 4 V našich úlohách sme sa obmedzili na sústavy lineárnych rovníc s najviac troma neznámymi, pričom počet rovníc sústavy sa vždy rovnal počtu neznámych. To však nemusí byť vždy splnené. Aj v týchto prípadoch by sme mohli aplikovať uvedené postupy, ale často by boli „neprehľadné“. Tomu môžeme predísť minimálnymi znalosťami z teórie matíc. Potom napr. Gaussova eliminačná metóda je výborným prostriedkom na zvládnutie aj napr. štyroch lineárnych rovníc so šiestimi neznámymi. Ale to až v ďalšom semestri štúdia na našej fakulte.

Úlohy

1. Vyriešte v $\mathbb{R}^2$, resp. v $\mathbb{R}^3$ sústavu rovníc:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & \begin{array}{l} 5x + 5y + z = 2, \\ 3x - 4y - 3z = 1, \\ -2x + y + z = -1; \end{array} \\ \text{b)} & \begin{array}{l} x - 3y + z = 1, \\ 2x - y + 9z = 4, \\ x + 2y + 8z = 10; \end{array} \end{array}$$

$$\text{c) } \frac{10}{x+5} + \frac{1}{y+2} = 1, \quad \text{d) } \frac{4}{x+2y} - \frac{1}{x-2y} = 1,$$

$$\frac{25}{x+5} - \frac{2}{y+2} = 1; \quad \frac{20}{x+2y} + \frac{3}{x-2y} = 1;$$

$$\begin{aligned} \text{e) } \quad x + 2y + 5z &= 1, & \text{f) } \quad \frac{x+1}{y+1} &= 2, \\ 3x + 4y + 7z &= 2, & 4 &= \frac{y+2}{z+1}; \\ 7x + 8y + 11z &= 4; & \frac{z+3}{x+1} &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

[a) $[x, y, z] = [1; -1; 2]$; b) nemá riešenie; c) $[x, y] = [10; 1]$; d) $[x, y] = [3; 2, 5]$;

e) napr. $[x, y, z] = [3s; (1-8s)/2; s]$, kde $s \in \mathbb{R}$; f) $[x, y, z] = [5; 2; 0]$

2. Dva vklady, z ktorých jeden je uložený na 2%-né a druhý na 3%-né ročné úrokové miery, vyniesli za rok 66 € úrokov. Keby sme vymenili ich úrokové miery, vyniesli by vklady za rok o 7 € menej úrokov. Aké veľké sú tieto vklady? [900 €, 1600 €]

3. Ak zväčšíme jeden rozmer kvádra o 1 m, zväčší sa jeho povrch o 58 m², ak zväčšíme druhý rozmer pôvodného kvádra o 2 m, zväčší sa jeho povrch o 104 m², a ak zväčšíme tretí rozmer pôvodného kvádra o 3 m, zväčší sa jeho povrch o 138 m². Určte rozmery kvádra. [10 m, 13 m, 16 m].

4. Vyriešte v $\mathbb{R}^2$ dané sústavy rovníc s parametrom $p \in \mathbb{R}$ (urobte diskusiu o riešení vzhľadom na parameter):

$$\begin{aligned} \text{a) } \quad px + 16y &= p, & \text{b) } \quad 2ps - t &= 0, & \text{c) } \quad 3u + 2v &= 6, \\ x + py &= 6p; & 4s + 3t &= 12; & pu + 4v &= 12. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{d) } \quad px - y &= 1, & \text{e) } \quad x + py &= 2p - 1, \\ p^2x + py &= p; & px + y &= 1; \end{aligned}$$

$$\text{a) } [x, y] = \left[\frac{p^2 - 96p}{p^2 - 16}; \frac{6p^2 - p}{p^2 - 16} \right] \text{ pre } p \neq \pm 4, \text{ pre } p = \pm 4 \text{ nemá riešenie};$$

$$\text{b) } [s, t] = \left[\frac{6}{3p+2}; \frac{12p}{3p+2} \right] \text{ pre } p \neq -\frac{2}{3}, \text{ pre } p = -\frac{2}{3} \text{ nemá riešenie};$$

$$\text{c) } [u, v] = [0; 3] \text{ pre } p \neq 6, \text{ pre } p = 6 \text{ je } [u, v] = [2(3-t)/3; t], \text{ kde } t \in \mathbb{R};$$

$$\text{d) } [x, y] = [1/p; 0] \text{ pre } p \neq 0, \text{ pre } p = 0 \text{ je } [x, y] = [t; -1], \text{ } t \in \mathbb{R};$$

$$\text{e) } [x, y] = [-1/(p+1); (2p+1)/(p+1)], \text{ pre } p = -1 \text{ nemá riešenie a pre } p = 1 \text{ je } [x, y] = [t; 1-t], \text{ } t \in \mathbb{R}.]$$

5. V množine $\mathbb{R}^2$ riešte sústavu rovníc:

$$\text{a) } 2x + y = 7, \quad xy = 5; \quad [[1; 5]; [5/2; 2]]$$

$$\text{b) } \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = \frac{34}{15}, \quad x^2 + y^2 = 34; \quad [[3; 5]; [5; 3]]$$

$$\text{c) } \frac{1}{x+y} + \frac{1}{x-y} = 2, \quad \frac{3}{x+y} + \frac{4}{x-y} = 7; \quad [[1; 0]]$$

$$\text{d) } \frac{11}{2x-3y} + \frac{18}{3x-2y} = 13, \quad \frac{27}{3x-2y} - \frac{2}{2x-3y} = 1; \quad [[5; 3]]$$

$$\text{e) } \frac{1}{x} - \frac{1}{y} = 7, \quad \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = 25. \quad [[1/4; -1/3], [1/3; -1/4]]$$