Riešenie nerovníc. Kvadratické nerovnice

Úlohy, v ktorých treba určiť v danej číselnej množine všetky prvky spĺňajúce dané nerovnosti medzi dvoma výrazmi, nazývame **nerovnice**. Nerovnicou s premennou $x \in \mathbb{R}$ je napríklad zápis $3(x-1) > 2x+5$. Výraz $3(x-1)$ tvorí ľavú stranu a výraz $2x+5$ pravú stranu tejto nerovnice.

Pri nerovniciach sú dôležité tieto pojmy:

- **obor nerovnice** (označenie $\mathcal{O}$): je to číselná množina, v ktorej hľadáme prvky spĺňajúce danú nerovnosť[1];
- **definičný obor nerovnice** (označenie $\mathcal{D}$): je to číselná podmnožina množiny $\mathcal{O}$, v ktorej majú všetky výrazy v nerovnici zmysel;
- **množina riešení** alebo **koreňov nerovnice** (označenie $\mathcal{K}$): je to množina všetkých tých prvkov množiny $\mathcal{D}$, ktoré spĺňajú požadovanú nerovnosť.

Zrejme platí $\mathcal{K} \subset \mathcal{D} \subset \mathcal{O}$.

Pri riešení nerovníc obyčajne používame tieto ekvivalentné úpravy nerovníc:

1. Nahradenie ľubovoľnej strany nerovnice výrazom, ktorý sa jej na $\mathcal{D}$ rovná.
2. Pripočítanie výrazu, ktorý je definovaný na $\mathcal{D}$, k obidvom stranám nerovnice.
3. Vynásobenie obidvoch strán nerovnice výrazom, ktorý na $\mathcal{D}$ nadobúda
   - kladné hodnoty,
   - záporné hodnoty a súčasne „obrátime“ znak nerovnosti.
4. Ak obidve strany nerovnice nadobúdajú na $\mathcal{D}$ nezáporné hodnoty, tak
   - umocnenie obidvoch strán nerovnice na druhú, štvrtú atď.,
   - odmocnenie obidvoch strán nerovnice.
5. Nepárne umocnenie a odmocnenie oboch strán nerovnice.

Vhodná metóda na riešenie nerovníc v obore reálnych čísel je tzv. **intervalová metóda** alebo tiež **metóda nulových bodov**. Exaktné zdôvodnenie tejto metódy nepodáme – vyžadovalo by si to hlbšie poznatky napr. o funkciách. Je to jednoduchá a „bezpečná“ metóda. Jej jednotlivé kroky sú vysvetlené pri riešení nasledujúceho príkladu.

Príklad 1 *Riešme v* $\mathbb{R}$ *nerovnicu*

$$\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2(x+2)} < 1.$$

Riešenie. Vysvetlíme si jednotlivé kroky intervalovej metódy.

1. **„Vyrobíme“ si na jednej strane nerovnice nulu**: v našom prípade stačí k obidvom stranám nerovnice pripočítať číslo (-1) (tým sme vlastne „preniesli pravú stranu nerovnice na jej ľavú stranu“). Dostaneme

$$\frac{5-x}{x-1} + \frac{1+4x}{2(x+2)} - 1 < 0.$$

[1] My sústredíme pozornosť na prípad, keď $\mathcal{O}$ je množina reálnych čísel $\mathbb{R}$.

2. **Upravíme nenulovú stranu nerovnice na jeden zlomok $\boldsymbol{V_1(x)/V_2(x)}$.** V našom prípade dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{x+23}{2(x-1)(x+2)} < 0, \qquad \text{čo je nerovnica typu} \qquad V(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} < 0, \tag{1}$$

kde $V_1(x) = x + 23$ a $V_2(x) = 2(x-1)(x+2)$.

3. **Určíme nulové body výrazov $\boldsymbol{V_1(x)}$ a $\boldsymbol{V_2(x)}$** (t. j. **vyriešime rovnice $\boldsymbol{V_1(x) = 0}$**, resp. **$\boldsymbol{V_2(x) = 0}$ – nech $\boldsymbol{\mathcal{K}_1}$**, resp. **$\boldsymbol{\mathcal{K}_2}$ sú ich riešeniami**).
V riešenom príklade to vyzerá takto:

$$x + 23 = 0, \qquad\qquad 2(x-1)(x+2) = 0,$$

a teda $\mathcal{K}_1 = \{-23\}$ a $\mathcal{K}_2 = \{1; -2\}$.

4. **Na číselnej osi znázorníme**
– nulové body $\boldsymbol{\mathcal{K}_2}$ menovateľa $\boldsymbol{V_2(x)}$ prázdnymi krúžkami[2]
– nulové body $\boldsymbol{\mathcal{K}_1}$ čitateľa $\boldsymbol{V_1(x)}$

   - **prázdnymi krúžkami v prípade ostrej nerovnice typu $<$ alebo $>$;**
   - **plnými krúžkami v prípade nerovnice typu $\leqq$ alebo $\geqq$.**

V našom prípade ide o ostrú nerovnicu, a preto znázorníme na číselnej osi všetky body $\mathcal{K}_1 = \{-23\}$ a $\mathcal{K}_2 = \{1; -2\}$ prázdnymi krúžkami (pozri obr. 1):

Obr. 1: Ilustrácia intervalovej metódy

5. **Krúžky z predchádzajúceho kroku nám rozdelili číselnú os na intervaly. Na každom z týchto intervalov nadobúda výraz $\boldsymbol{V_1(x)/V_2(x)}$ len kladné alebo len záporné hodnoty. O tom rozhodneme tak, že vyčíslime hodnotu $\boldsymbol{V(x) = V_1(x)/V_2(x)}$ v ľubovoľnom vybranom vnútornom bode konkrétneho intervalu. Podľa toho, či hodnota výrazu $\boldsymbol{V(x)}$ vo vybranom bode konkrétneho intervalu je kladná, resp. záporná, označíme na číselnej osi tento interval znakom $\oplus$, resp. $\ominus$.**

V našom príklade sme dostali otvorené intervaly $(-\infty; -23)$, $(-23; -2)$, $(-2; 1)$ a $(1; +\infty)$. Z prvého intervalu $(-\infty; -23)$ vyberieme napr. číslo -24 a vyčíslime v ňom hodnotu výrazu[3] $V(x) = (x+23)/[2(x-1)(x+2)]$. Overte, že $V(-24) < 0$. Vyšlo nám záporné číslo, a preto sme na obr. 1 označili interval $(-\infty; -23)$ znakom $\ominus$. Obdobným spôsobom postupujeme aj pre ostatné intervaly:
$-3 \in (-23; -2)$ a $V(-3) > 0$, a preto sme na obr. 1 označili interval $(-23; -2)$ znakom $\oplus$;
$0 \in (-2; 1)$ a $V(0) < 0$, , a preto sme priradili intervalu $(-23; -2)$ znak $\ominus$;
$2 \in (1; \infty)$ a $V(2) > 0$, a teda pre interval $(-23; -2)$ máme $\oplus$.

[2] „Prázdny krúžok“ znamená, že zodpovedajúce číslo nepatrí do riešenia danej nerovnice; „plný krúžok“ znamená, že zodpovedajúce číslo patrí do riešenia danej nerovnice.
[3] Nezaujíma nás presná hodnota $V(-24)$; dôležité je to, či táto hodnota je kladná alebo záporná.

6. **Z číselnej osi získame samotné riešenie nerovnice: ak daná nerovnica po kroku 2 má tvar:**
   $\boldsymbol{V(x) > 0}$, tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme v kroku 5 označili znakom $\oplus$;
   $\boldsymbol{V(x) < 0}$, tak jej riešením je zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme označili znakom $\ominus$.

   V našom príklade na základe (1) chceme zistiť, kedy je splnená nerovnica $V(x) < 0$. Preto riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sú označené znakom $\ominus$. Teda

$$\mathcal{K} = (-\infty; -23) \cup (-2; 1). \qquad \square$$

Poznámka 1 *Všimnite si, že pri intervalovej metóde sme danú nerovnicu upravili na tvar $V_1(x)/V_2(x) < 0$, pričom sme použili len prvé dve z uvedených ekvivalentných úprav nerovníc. Tieto dve úpravy sú menej náročné ako ostatné ekvivalentné úpravy (sú pomerne „bezpečné“). Nie je potrebné násobiť a ani deliť nerovnicu nejakým výrazom. To sú úpravy, ktoré študenti obyčajne nesprávne používajú (a nielen pri nerovniciach, ale aj pri rovniciach).*

Príklad 2 *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnicu*

$$\frac{2}{x} - \frac{1-x}{1+x} \geqq \frac{1+x}{x}\,.$$

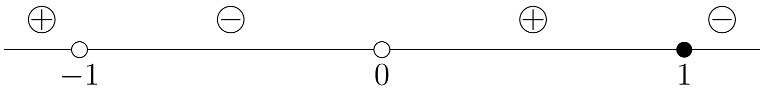
Riešenie. Prvé dva kroky intervalovej metódy (pozri predchádzajúci príklad) sú jednoduché: po prenesení výrazu $\frac{1+x}{x}$ na ľavú stranu nerovnice a následnej úprave ľavej strany dostaneme ekvivalentnú nerovnicu

$$\frac{1-x}{x(1+x)} \geqq 0, \qquad \text{čo je nerovnica typu} \qquad V(x) = \frac{V_1(x)}{V_2(x)} \geqq 0, \tag{2}$$

kde $V_1(x) = 1 - x$ a $V_2(x) = x(1+x)$.

V treťom kroku určíme korene čitateľa, resp. menovateľa, t. j. vyriešime rovnicu $1 - x = 0$, resp. a $x(1+x) = 0$. Je zrejmé, že ich korene sú $\mathcal{K}_1 = \{1\}$, resp. $\mathcal{K}_2 = \{0; -1\}$.

Vo štvrtom kroku znázorníme na číselnej osi korene menovateľa (čísla 0 a -1) prázdnym krúžkom a koreň čitateľa (číslo 1) plným krúžkom (lebo daná nerovnica je „neostrá“, t. j. je typu $\geqq$):



Obr. 2: Ilustrácia intervalovej metódy

V piatom kroku vyčíslením hodnoty výrazu $V(x) = \frac{1-x}{x(1+x)}$ vo vhodne vybratých bodoch jednotlivých intervalov (napríklad -2; $-1/2$; $1/2$; 2) získame označenie týchto intervalov znakom $\oplus$ alebo $\ominus$.

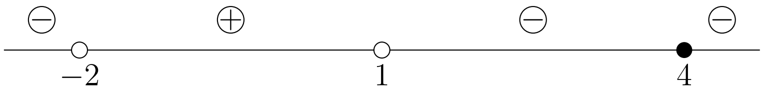
Na záver si uvedomíme, že riešením nerovnice (2) je množina tých hodnôt x, pre ktoré je výraz $V(x)$ nezáporný. Tomu zodpovedá zjednotenie všetkých intervalov, ktoré sme na obr. 2 označili znakom $\oplus$. Teda riešením danej nerovnice je množina

$$\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (0; 1\rangle. \qquad \square$$

Príklad 3 *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnicu*

$$0 \geqq \frac{(x-4)^2(x+2)}{(x+2)^2(1-x)^3}.$$

Riešenie. Nerovnica má na jednej strane nulu a na jej druhej strane je zlomok, v ktorom je $V_1(x) = (x-4)^2(x+2)$ a $V_2(x) = (x+2)^2 \cdot (1-x)^3$ – teda prvé dva kroky intervalovej metódy sú „vybavené". Korene polynómov V_1, resp. V_2 sú $\mathcal{K}_1 = \{-2; 4\}$, resp. $\mathcal{K}_2 = \{-2; 1\}$. Pri ich znázornení na číselnej osi označíme body -2 a 1 prázdnym krúžkom a bod 4 plným krúžkom (ide o neostrú nerovnicu).[4]



Riešením danej nerovnice je množina $\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (1; \infty)$. □

Poznámka 2 *Výhody intervalovej metódy môžeme použiť aj pri riešení kvadratických nerovníc alebo aj algebrických nerovníc. Pri takýchto nerovniciach je výraz $V_2(x)$ v (1) rovný jednej, a preto je $\mathcal{K}_2 = \emptyset$. Takto štruktúra riešenia týchto nerovníc závisí len od množiny $\mathcal{K}_1$. Ale to nie je nič iné ako korene zodpovedajúcej kvadratickej alebo algebrickej rovnice.*

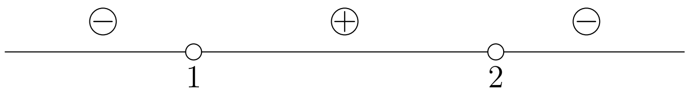
Príklad 4 *Riešme v $\mathbb{R}$ nerovnice: a) $3x - x^2 - 2 < 0$; b) $x^2 - 4x + 4 \leqq 0$; c) $x^4 - 3x^2 - 4 \leqq 0$.*

Riešenie. Vo všetkých troch prípadoch použijeme intervalovú metódu a poznámku 2.

a) Určíme množinu $\mathcal{K}_1$, t. j. vypočítame korene zodpovedajúcej kvadratickej rovnice $-x^2 + 3x - 2 = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-1)(-2)}}{-2} = \left\{ \begin{array}{l} 1, \\ 2 \end{array} \right.$$

a znázorníme ich na číselnej osi prázdnymi krúžkami (nerovnica je ostrá)



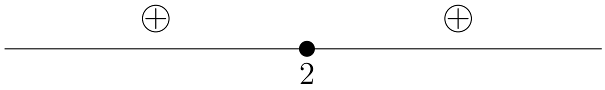
Vyčíslením hodnoty výrazu $P(x) = -x^2 + 3x - 2$ v bodoch $0,\ 3/2,\ 3$ dostaneme označenie získaných intervalov: $P(0) < 0, \quad P(3/2) > 0, \quad P(3) < 0$. Riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sme označili symbolom $\ominus$, t. j. množina

$$\mathcal{K} = (-\infty; 1) \cup (2; \infty).$$

b) Zodpovedajúca kvadratická rovnica $x^2 - 4x + 4 = 0$ má jediný reálny koreň, a to číslo 2. Vyznačíme ho na číselnej osi plným krúžkom (nerovnica je neostrá). Číselnú os rozdelí na dva intervaly.

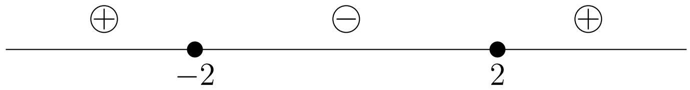
Výraz $x^2 - 4x + 4$ nadobúda vo zvolených bodoch 0 a 3 kladné hodnoty (obr. 3). Riešením danej nerovnice je zjednotenie intervalov, ktoré sme označili symbolom $\ominus$. Žiaden interval nie je takto označený. Ale bod 2 je s plným krúžkom, a preto riešením danej kvadratickej nerovnice je množina $\mathcal{K} = \{2\}$.

[4] Viete vysvetliť, prečo sme číslo -2 znázornili prázdnym krúžkom? Veď $-2 \in \mathcal{K}_1$. A prvky množiny $\mathcal{K}_1$ znázorňujme pri neostrej nerovnici plným krúžkom!



Obr. 3: Intervalová metóda

c) Substitúciou $x^2 = t$ určíme reálne korene príslušnej rovnice $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$. Overte, že $\mathcal{K} = \{\pm 2\}$. Čísla ± 2 vyznačíme na číselnej osi plnými krúžkami a zistíme znamienka polynómu $P(x) = x^4 - 3x^2 - 4$ na získaných intervaloch.



Napr. $P(-3) = 50 > 0$, $P(0) = -4 < 0$ a $P(3) = 50 > 0$, čo vyznačíme na obrázku. Riešením danej nerovnice je množina $\mathcal{K} = \langle -2; 2 \rangle$. □

Príklad 5 *Pre ktoré hodnoty parametra $p \in \mathbb{R}$ nemá rovnica*

$$(2p + 1)x^2 - 3(p - 1)x - p + 1 = 0$$

reálne korene?

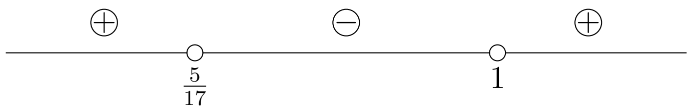
Riešenie. Pre $p = -1/2$ ide o lineárnu rovnicu, ktorá má práve jeden reálny koreň (presvedčte sa o tom). Pre $p \neq -1/2$ máme kvadratickú rovnicu, ktorej diskriminant je

$$D = [-3(p - 1)]^2 - 4(2p + 1)(-p + 1) = 17p^2 - 22p + 5.$$

Daná rovnica nemá reálne korene, ak $D < 0$, t. j. ak je splnená kvadratická nerovnica

$$17p^2 - 22p + 5 < 0.$$

Nebudeme vysvetľovať detaily riešenia tejto nerovnice: príslušná kvadratická rovnica $17p^2 - 22p + 5 = 0$ má korene $\mathcal{K} = \{1; 5/17\}$, ktoré delia číselnú os na tri časti:



Získaným intervalom priradíme obvyklým spôsobom znaky ⊕ alebo ⊖. Rovnica nemá reálne korene pre $p \in (5/17; 1)$. Tu si treba uvedomiť, že $-1/2 \notin (5/17; 1)$. Viete prečo? □

Poznámka 3 *Pri určovaní definičného oboru funkcií je často potrebné vedieť riešiť sústavu nerovníc s jednou neznámou (pozri príklad 4 z nasledujúcich cvičení). K tomu je nutné zvlášť vyriešiť každú nerovnicu a riešenie sústavy nerovníc je potom prienikom riešení všetkých uvažovaných nerovníc – teda žiadna vylučovacia metóda alebo dosadzovacia metóda!*

Úlohy

1. V množine $\mathbb{R}$ riešte nerovnice:

a) $\dfrac{3x-1}{5} - \dfrac{13-x}{2} \geqq \dfrac{7x}{3} - \dfrac{11(x+3)}{6}$; $[\mathcal{K} = \langle 2; \infty)]$

b) $3x^2 - 2x + 5 > 0$; $[\mathcal{K} = \mathbb{R}]$

c) $-3x^2 - 7x + 6 \geqq 0$; $[\mathcal{K} = \langle -3; 2/3\rangle]$

d) $x^2 + 2x < 6x - 15$; $[\mathcal{K} = \emptyset]$

e) $(x+2)(x+8) \leqq (x+8)(4x-25)$; $[\mathcal{K} = (-\infty;\ -8\rangle \cup \langle 9;\ \infty)]$

f) $x^4 + x^3 - x - 1 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \langle -1;\ 1\rangle]$

g) $x^4 + x^3 + x + 1 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \{-1\}]$

h) $x^4 + 13x^2 + 36 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \emptyset]$

i) $x^4 - 13x^2 + 36 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \langle -3; -2\rangle \cup \langle 2; 3\rangle]$

j) $x^4 - 12x^2 + 36 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \{\pm\sqrt{6}\}]$

k) $\dfrac{(x+2)^3 x^8 (1-x^2)^3}{(x-3)^5 (x-1)(x-2)^4} \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \langle -2;\ -1\rangle \cup \{0\} \cup (3; \infty)]$

ℓ) $\dfrac{1}{x+2} \leqq \dfrac{3}{x-2}$; $[\mathcal{K} = \langle -4; -2) \cup (2; \infty)]$

m) $\dfrac{x^2+5x+4}{x^2-5x-6} < 0$; $[\mathcal{K} = (-4; -1) \cup (-1; 6)]$

n) $\dfrac{-x^3+x^2-x+1}{x+8} \geqq 0$; $[\mathcal{K} = (-8; 1\rangle]$

o) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2} \geqq 1$; $[\mathcal{K} = (-\infty; -2) \cup (-1; 0\rangle]$

p) $\dfrac{1}{(x-1)(x-2)} \leqq \dfrac{1}{x(x+1)}$; $[\mathcal{K} = (-\infty; -1) \cup (0; 1/2\rangle \cup (1; 2)]$

q) $\dfrac{x+1}{x-5} \geqq \dfrac{x-2}{x-5}$; $[\mathcal{K} = (5; \infty)]$

r) $\dfrac{1-3x}{x+4} < 2$; $[\mathcal{K} = (-\infty; -4) \cup (-7/5; +\infty)]$

s) $x^2 - 0,2x + 0,01 \leqq 0$; $[\mathcal{K} = \{0,1\}]$

t) $\dfrac{5-x}{2x-2} + \dfrac{1+4x}{2x+2} < 1$. $[\mathcal{K} = (-1; 1)]$

2. Pre aké hodnoty parametra $a \in \mathbb{R}$ má daná rovnica len kladné riešenie?

a) $a(2x+1) = 4(x+3)$; $[a \in (2; 12)]$

b) $\dfrac{2}{2x-a} = \dfrac{1}{4-ax}$; $[a \in (-\infty; -8) \cup (-1; \infty)]$

c) $\dfrac{4x-1}{x-1} = a+3$; $[a \in (-\infty; -2) \cup (1; \infty)]$

d) $\dfrac{3x-1}{a+2} + \dfrac{x}{5} = 1$. $[a \in (-\infty; -17) \cup (-3; \infty)]$

3. Určte všetky hodnoty parametra $b \in \mathbb{R}$, pre ktoré je riešením danej sústavy rovníc v $\mathbb{R}^2$ dvojica záporných čísel $x < 0$ a $y < 0$:
   a) $x + 2by = 3$, $3x - 2y{=}1$; $[(-3; -1/3)]$
   b) $2x - y = 8$, $3x - 2y = b$; $[(16; \infty)]$
   c) $2x - y = 8$, $bx + y = 10$; $[(-\infty; -2)]$
   d) $3x - 6y = 1$, $5x - by = 2$; $[(10; 12)]$
   e) $4x + 3y = 12$, $2x + by = 5$; $[\emptyset]$
   f) $3x - 2y = 1$, $bx + 2y = 8$. $[(-\infty; -3)]$

4. V $\mathbb{R}$ riešte sústavu nerovníc:
   a) $2x + 3 \geqq 1, \qquad 1/x + 1/3 < 0$; $[\langle -1; 0)]$
   b) $x^2 - 5x + 18 \geqq 0, \qquad x^2 < 1$; $[(-1; 1)]$
   c) $5x - 4 \leqq x^2 < 16$; $[(-4; 1\rangle]$
   d) $-x^2 + x + 6 \geqq 0, \qquad x^2 + 2x - 3 > 0$; $[(1; 3\rangle]$
   e) $x^2 + x - 2 \leqq 0, \qquad \dfrac{2x}{x+1} \geqq 1$. $[\langle -2; -1) \cup \{1\}]$

5. Urobte diskusiu o počte reálnych koreňov daných kvadratických rovníc v závislosti na parametri $p \in \mathbb{R}$:
   a) $2px^2 - 2x - 3p - 2 = 0$; b) $(p-1)x^2 - 2(p+1)x + p - 2 = 0$;
   c) $(x-1)(x-3) + p(x-2)(x-4) = 0$; d) $x^2 + 3x + p^2 + 4 = 0$.

   [a) pre $p \neq 0$ má rovnica dva reálne korene, pre $p = 0$ má jeden koreň $\mathcal{K} = \{-1\}$; b) pre $p \in (1/5; 1) \cup (1; \infty)$ má dva reálne korene, pre $p \in \{1/5; 1\}$ má jeden a pre $p \in (-\infty; 1/5)$ nemá reálny koreň; c) pre $p \neq -1$ má dva reálne korene, pre $p = -1$ má jeden koreň $\mathcal{K} = \{2{,}5\}$; d) pre žiadne $p \in \mathbb{R}$ nemá reálny koreň]