Numerické riešenie nelineárnych rovníc

V tejto kapitole sa budeme zaoberať určovaním reálnych koreňov rovnice

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

kde f je reálna funkcia reálnej premennej.
Číslo α, pre ktoré $f(\alpha) = 0$, nazývame koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je funkcia f polynómom, nazývame rovnicu $f(x) = 0$ algebrickou rovnicou.

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

V tejto kapitole sa budeme zaoberať určovaním reálnych koreňov rovnice

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

kde f je reálna funkcia reálnej premennej.
Číslo α, pre ktoré $f(\alpha) = 0$, nazývame koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je funkcia f polynómom, nazývame rovnicu $f(x) = 0$ algebrickou rovnicou.
Na riešenie nelineárnych rovníc sú vypracované špeciálne metódy. Avšak u väčšiny rovníc dokážeme vypočítať iba približnú hodnotu koreňa α.

Numerické riešenie nelineárnych rovníc

V tejto kapitole sa budeme zaoberať určovaním reálnych koreňov rovnice

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

kde f je reálna funkcia reálnej premennej.
Číslo α, pre ktoré $f(\alpha) = 0$, nazývame koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je funkcia f polynómom, nazývame rovnicu $f(x) = 0$ algebrickou rovnicou.
Na riešenie nelineárnych rovníc sú vypracované špeciálne metódy. Avšak u väčšiny rovníc dokážeme vypočítať iba približnú hodnotu koreňa α.
Pri riešení rovnice (1) je vhodný nasledujúci postup:

1. Určíme počet koreňov rovnice.
2. Pre každý koreň α_i určíme interval (a_i, b_i) taký, že $\alpha_i \in (a_i, b_i)$. (separujeme korene), pričom $\alpha_i \in (a_i, b_i)$ je jediný koreň v intervale (a_i, b_i).
3. Použijeme približné metódy na výpočet koreňov.
4.
   - Ak je daná presnosť ε, proces ukončíme, keď je daná presnosť dosiahnutá.
   - Ak je daný počet iterácií, urobíme odhad absolútnej chyby vypočítaného koreňa.

Veta (Bolzanova)

Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b \rangle \subset A$, pričom platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$.

Veta (Bolzanova)

Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subset A$, pričom platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$.

Dôsledok

Nech pre x_n platí

$$f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0.$$

Potom sa v intervale $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ nachádza koreň α, teda x_n je riešenie úlohy s presnosťou ε. Tento test obyčajne nazývame $\pm\varepsilon$-test.

Poznámka. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale (a, b) nulový bod aj v prípade, keď $f(a) \cdot f(b) > 0$. V tomto prípade je počet koreňov v intervale (a, b) párny.

Veta (Bolzanova)

Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subset A$, pričom platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$.

Dôsledok

Nech pre x_n platí

$$f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0.$$

Potom sa v intervale $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ nachádza koreň α, teda x_n je riešenie úlohy s presnosťou ε. Tento test obyčajne nazývame $\pm\varepsilon$-test.

Poznámka. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale (a, b) nulový bod aj v prípade, keď $f(a) \cdot f(b) > 0$. V tomto prípade je počet koreňov v intervale (a, b) párny.

Príklad

Rovnica $x^2 - 4 = 0$ má v intervale $(-3; 3)$ korene -2, 2, hoci $f(-3) \cdot f(3) > 0$.

Veta (Bolzanova)

Nech $A \subseteq \mathbb{R}$ a funkcia $f : A \to \mathbb{R}$ je spojitá na intervale $\langle a, b\rangle \subset A$, pričom platí $f(a) \cdot f(b) < 0$. Potom existuje aspoň jedno číslo $c \in (a, b)$ také, že $f(c) = 0$.

Dôsledok

Nech pre x_n platí

$$f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0.$$

Potom sa v intervale $(x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon)$ nachádza koreň α, teda x_n je riešenie úlohy s presnosťou ε. Tento test obyčajne nazývame $\pm\varepsilon$-test.

Poznámka. Rovnica $f(x) = 0$ môže mať v intervale (a, b) nulový bod aj v prípade, keď $f(a) \cdot f(b) > 0$. V tomto prípade je počet koreňov v intervale (a, b) párny.

Príklad

Rovnica $x^2 - 4 = 0$ má v intervale $(-3; 3)$ korene -2, 2, hoci $f(-3) \cdot f(3) > 0$.

Príklad

Separujte všetky reálne korene rovnice $x^3 - x - 1 = 0$.

Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Predpokladajme, že rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden koreň α v intervale (a, b).
Definujme postupnosť intervalov $\langle a_n, b_n \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$ predpisom:

1. $\langle a_0, b_0 \rangle = \langle a, b \rangle$.

Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Predpokladajme, že rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden koreň α v intervale (a, b). Definujme postupnosť intervalov $\langle a_n, b_n \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$ predpisom:

1. $\langle a_0, b_0 \rangle = \langle a, b \rangle$.
2. Nech je definovaný interval $\langle a_n, b_n \rangle$, pričom $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. Nech
$$c_n = (a_n + b_n)/2. \tag{2}$$
3. Ak je $f(c_n) = 0$, potom je c_n koreňom rovnice. Ak je $f(c_n) \neq 0$ a $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$, položíme $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$. Ak platí opačná nerovnosť, t. j. $f(a_n) \cdot f(c_n) > 0$, položíme $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$. Ak má postupnosť (c_n) konečný počet členov, jej posledný člen je koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je postupnosť (c_n) nekonečná, potom má limitu a platí
$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha.$$

Metóda polovičného delenia intervalu (bisekcie)

Predpokladajme, že rovnica $f(x) = 0$ má práve jeden koreň α v intervale (a, b). Definujme postupnosť intervalov $\langle a_n, b_n \rangle$, $n = 1, 2, \ldots$ predpisom:

1. $\langle a_0, b_0 \rangle = \langle a, b \rangle$.
2. Nech je definovaný interval $\langle a_n, b_n \rangle$, pričom $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. Nech
$$c_n = (a_n + b_n)/2. \tag{2}$$
3. Ak je $f(c_n) = 0$, potom je c_n koreňom rovnice. Ak je $f(c_n) \neq 0$ a $f(a_n) \cdot f(c_n) < 0$, položíme $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = c_n$. Ak platí opačná nerovnosť, t. j. $f(a_n) \cdot f(c_n) > 0$, položíme $a_{n+1} = c_n$, $b_{n+1} = b_n$. Ak má postupnosť (c_n) konečný počet členov, jej posledný člen je koreňom rovnice $f(x) = 0$. Ak je postupnosť (c_n) nekonečná, potom má limitu a platí
$$\lim_{n \to \infty} c_n = \alpha.$$
Pre odhad absolútnej chyby koreňa α platí $|c_n - \alpha| < \frac{b-a}{2^{n+1}}$.

Ak máme vypočítať koreň α s presnosťou $\varepsilon > 0$, ukončíme proces delenia intervalu, ak $|b_n - a_n| < 2\varepsilon$ a za aproximáciu koreňa α vezmeme číslo $(a_n + b_n)/2$.

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1; 2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 $(-)$	2 $(+)$	1,5 $(+)$	$-$

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1;2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (–)	2 $(+)$	1,5 $(+)$	$-$
1	1 (–)	1,5 $(+)$	1,25 (–)	$+$

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$*.*

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1; 2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (–)	2 $(+)$	1,5 $(+)$	$-$
1	1 (–)	1,5 $(+)$	1,25 (–)	$+$
2	1,25 (–)	1,5 $(+)$	1,375 $(+)$	$-$

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1; 2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (–)	2 $(+)$	1,5 $(+)$	$-$
1	1 (–)	1,5 $(+)$	1,25 (–)	$+$
2	1,25 (–)	1,5 $(+)$	1,375 $(+)$	$-$
3	1,25 (–)	1,375 $(+)$	1,3125 (–)	$+$

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1; 2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (–)	2 (+)	1,5 (+)	−
1	1 (–)	1,5 (+)	1,25 (–)	+
2	1,25 (–)	1,5 (+)	1,375 (+)	−
3	1,25 (–)	1,375 (+)	1,3125 (–)	+
4	1,3125 (–)	1,375 (+)	1,34375 (+)	−

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1; 2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (−)	2 (+)	1,5 (+)	−
1	1 (−)	1,5 (+)	1,25 (−)	+
2	1,25 (−)	1,5 (+)	1,375 (+)	−
3	1,25 (−)	1,375 (+)	1,3125 (−)	+
4	1,3125 (−)	1,375 (+)	1,34375 (+)	−
5	1,3125 (−)	1,34375 (+)	1,32813 (+)	−

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0$.

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1; 2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (−)	2 (+)	1,5 (+)	−
1	1 (−)	1,5 (+)	1,25 (−)	+
2	1,25 (−)	1,5 (+)	1,375 (+)	−
3	1,25 (−)	1,375 (+)	1,3125 (−)	+
4	1,3125 (−)	1,375 (+)	1,34375 (+)	−
5	1,3125 (−)	1,34375 (+)	1,32813 (+)	−
6	1,3125 (−)	1,32813 (+)	1,32032 (−)	+

Príklad

Metódou polovičného delenia intervalu s presnosťou 0,005 vypočítajte reálny koreň rovnice $f(x) = x^3 - x - 1 = 0.$

Už vieme, že jediný koreň kovnice leží v intervale $(1;2)$. Teda $a_0 = 1$, $b_0 = 2$.

n	a_n $(f(a_n))$	b_n $(f(b_n))$	c_n $(f(c_n))$	$f(a_n) \cdot f(c_n)$
0	1 (–)	2 (+)	1,5 (+)	$-$
1	1 (–)	1,5 (+)	1,25 (–)	$+$
2	1,25 (–)	1,5 (+)	1,375 (+)	$-$
3	1,25 (–)	1,375 (+)	1,3125 (–)	$+$
4	1,3125 (–)	1,375 (+)	1,34375 (+)	$-$
5	1,3125 (–)	1,34375 (+)	1,32813 (+)	$-$
6	1,3125 (–)	1,32813 (+)	1,32032 (–)	$+$
7	1,32032 (–)	1,32813 (+)	1,32423	

Pretože $|1{,}32813 - 1{,}32032| < 2 \cdot 0{,}005$ a $f(1{,}32813) \cdot f(1{,}32032) < 0$, môžeme aproximovať koreň pomocou $c_6 = 1,32423$. Teda $\alpha \approx 1,32423.$

Newtonova metóda

Predpokladajme, že $\langle a, b\rangle$ je interval separácie, teda platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ a v intervale $\langle a, b\rangle$ leží práve jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.
Newtonovu metódu, nazývanú tiež metóda dotyčníc, môžeme použiť na riešenie rovnice $f(x) = 0$, ak je funkcia dvakrát diferencovateľná a buď konvexná na celom intervale $\langle a, b\rangle$ alebo konkávna na celom intervale $\langle a, b\rangle$. Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_n: $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$. Ďalšiu aproximáciu x_{n+1} určíme ako priesečník dotyčnice s osou x (t. j. pri dosadení x_{n+1} za x položíme súčasne y rovné 0). Dostávame

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

a z toho rekurentný vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots.$$

Newtonova metóda

Predpokladajme, že $\langle a, b\rangle$ je interval separácie, teda platí $f(a) \cdot f(b) < 0$ a v intervale $\langle a, b\rangle$ leží práve jeden koreň rovnice $f(x) = 0$.
Newtonovu metódu, nazývanú tiež metóda dotyčníc, môžeme použiť na riešenie rovnice $f(x) = 0$, ak je funkcia dvakrát diferencovateľná a buď konvexná na celom intervale $\langle a, b\rangle$ alebo konkávna na celom intervale $\langle a, b\rangle$. Rovnica dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode x_n: $y - f(x_n) = f'(x_n)(x - x_n)$. Ďalšiu aproximáciu x_{n+1} určíme ako priesečník dotyčnice s osou x (t. j. pri dosadení x_{n+1} za x položíme súčasne y rovné 0). Dostávame

$$-f(x_n) = f'(x_n)(x_{n+1} - x_n).$$

a z toho rekurentný vzorec

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots .$$

Veta (Odhad chyby)

Nech α je presná hodnota a x_k približná hodnota koreňa rovnice (1). Nech obe tieto hodnoty ležia v intervale (a, b) a $|f'(x)| \geq m > 0$ pre všetky $x \in \langle a, b\rangle$. Potom platí odhad

$$|x_k - \alpha| \leq \frac{|f(x_k)|}{m}. \tag{3}$$

Veta

Nech na intervale $\langle a, b\rangle$ sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0.$

Veta

Nech na intervale $\langle a, b\rangle$ sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. $f''(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$).

Veta

Nech na intervale $\langle a, b\rangle$ sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. $f''(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$).
3. Pre štartovací bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Potom postupnosť daná vzťahom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

konverguje ku koreňu α rovnice $f(x) = 0$, teda platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Veta

Nech na intervale $\langle a, b\rangle$ sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. $f''(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$).
3. Pre štartovací bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Potom postupnosť daná vzťahom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

konverguje ku koreňu α rovnice $f(x) = 0$, teda platí $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Ak navyše platí podmienka

4. $|f'(x)| > 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ ($f^{'}(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$), môžeme na odhad presnosti používať vzťah $|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$, kde $m \leq \min\limits_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$.

Veta

Nech na intervale $\langle a, b\rangle$ sú splnené nasledujúce podmienky:

1. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
2. $f''(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$).
3. Pre štartovací bod $x_0 \in \langle a, b\rangle$ platí $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Potom postupnosť daná vzťahom

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{4}$$

konverguje ku koreňu α rovnice $f(x) = 0$, teda platí $\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha$.

Ak navyše platí podmienka

4. $|f'(x)| > 0$ pre každé $x \in \langle a, b\rangle$ ($f'(x)$ nemení znamienko na intervale $\langle a, b\rangle$), môžeme na odhad presnosti používať vzťah $|x_n - \alpha| \leq \frac{|f(x_n)|}{m}$, kde $m \leq \min_{x\in\langle a,b\rangle} |f''(x)|$.

STOP TEST:
Ak platí 4, iteračný proces ukončíme, keď platí $\frac{|f(x_n)|}{m} < \varepsilon$, potom $\alpha \approx x_n$,
Ak neplatí 4, iteračný proces ukončíme, keď platí $f(x_n - \varepsilon) \cdot f(x_n + \varepsilon) < 0$, potom $\alpha \approx x_n$.

Príklad

Newtonovou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ *s presnosťou 0,005.*

Pre danú úlohu je $\alpha \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$. Keďže $f'(x) = 3\,x^2 - 1$, na intervale separácie je $m = \min\limits_{x \in \langle 1;1{,}5 \rangle} |f'(x)| = 2$. Pretože $f''(x) = 6\,x > 0$ na uvažovanom intervale a $f(1{,}5) > 0$, bude Newtonova metóda konvergovať k riešeniu rovnice z bodu $x_0 = 1{,}5$.

Príklad

Newtonovou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ s presnosťou 0,005.

Pre danú úlohu je $\alpha \in \langle 1; 1{,}5\rangle$. Keďže $f'(x) = 3\,x^2 - 1$, na intervale separácie je $m = \min\limits_{x \in \langle 1;1{,}5\rangle} |f'(x)| = 2$. Pretože $f''(x) = 6\,x > 0$ na uvažovanom intervale a $f(1{,}5) > 0$, bude Newtonova metóda konvergovať k riešeniu rovnice z bodu $x_0 = 1{,}5$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m}$
0	1,5	$0,875$	$5,75$	$0,4375$

Príklad

Newtonovou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ s presnosťou 0,005.

Pre danú úlohu je $\alpha \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$. Keďže $f'(x) = 3\,x^2 - 1$, na intervale separácie je $m = \min\limits_{x \in \langle 1;1{,}5 \rangle} |f'(x)| = 2$. Pretože $f''(x) = 6\,x > 0$ na uvažovanom intervale a $f(1{,}5) > 0$, bude Newtonova metóda konvergovať k riešeniu rovnice z bodu $x_0 = 1{,}5$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n) \rvert}{m}$
0	1,5	$0,875$	$5,75$	$0,4375$
1	1,34783	$0,10068$	$4,44990$	$0,05034$

Príklad

Newtonovou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ s presnosťou 0,005.

Pre danú úlohu je $\alpha \in \langle 1; 1{,}5 \rangle$. Keďže $f'(x) = 3\,x^2 - 1$, na intervale separácie je $m = \min\limits_{x \in \langle 1;1{,}5 \rangle} |f'(x)| = 2$. Pretože $f''(x) = 6\,x > 0$ na uvažovanom intervale a $f(1{,}5) > 0$, bude Newtonova metóda konvergovať k riešeniu rovnice z bodu $x_0 = 1{,}5$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n) \rvert}{m}$
0	1,5	$0,875$	$5,75$	$0,4375$
1	1,34783	$0,10068$	$4,44990$	$0,05034$
2	1,32520	$0,00205$	$4,26846$	$0,001025 < \varepsilon$

Keďže

$$|x_2 - \alpha| \leq \frac{|f(x_2)|}{m} < \frac{0{,}0021}{2} = 0{,}00105,$$

už po druhom kroku sme dosiahli požadovanú presnosť. Teda $\alpha \approx 1.32520$.

Príklad

Separujte všetky reálne korene rovnice $e^{2x} - 8x = 0$ *a Newtonovou metódou vypočítajte najmenší reálny koreň rovnice s presnosťou* $\varepsilon = 10^{-5}$.

n	x_n	$f(x_n)$	$f'(x_n)$	$\frac{\lvert f(x_n)\rvert}{m}$
0				
1				
2				
3				
4				
5				

Metóda prostej iterácie

Hľadáme riešenie rovnice $f(x) = 0$ v intervale $\langle a, b\rangle$. Rovnicu $f(x) = 0$ vieme vždy prepísať na tvar

$$x = \varphi(x) \tag{5}$$

tak, aby $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ bola kontraktívna funkcia na $\langle a, b\rangle$, t. j.

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda|x - y|$$

pre $x, y \in \langle a, b\rangle$ a zároveň $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in \langle a, b\rangle$, pričom $\lambda \in (0, 1)$ sa nazýva koeficient kontraktívnosti.

Metóda prostej iterácie

Hľadáme riešenie rovnice $f(x) = 0$ v intervale $\langle a, b\rangle$. Rovnicu $f(x) = 0$ vieme vždy prepísať na tvar

$$x = \varphi(x) \tag{5}$$

tak, aby $\varphi : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ bola kontraktívna funkcia na $\langle a, b\rangle$, t. j.

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq \lambda |x - y|$$

pre $x, y \in \langle a, b\rangle$ a zároveň $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in \langle a, b\rangle$, pričom $\lambda \in (0, 1)$ sa nazýva koeficient kontraktívnosti.

Nech funkcia φ je na $\langle a, b\rangle$ diferencovateľná. Potom podľa Lagrangeovej vety o strednej hodnote existuje $\xi \in (a, b)$ také, že

$$\varphi(x) - \varphi(y) = \varphi'(\xi)(x - y), \text{resp.} \frac{\varphi(x) - \varphi(y)}{x - y} = \varphi'(\xi)$$

Ak existuje kladné číslo M také, že $M = \max\limits_{x \in \langle a, b\rangle} |\varphi'(x)|$, tak pre $x \in \langle a, b\rangle$ platí

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \leq M|x - y|.$$

Ak je číslo $M < 1$, môžeme ho zobrať za koeficient kontraktívnosti, teda $\lambda = M$.

Veta

Nech $\varphi : \langle a, b\rangle \to \langle a, b\rangle$ je spojitá funkcia na $\langle a, b\rangle$. Nech existuje spojitá derivácia φ' na intervale (a, b) a číslo λ, $0 \leq \lambda < 1$ také, že $|\varphi'(x)| \leq \lambda$ pre ľubovoľné $x \in (a, b)$.
Potom iteračný proces

$$x_{n+1} = \varphi(x_n) \quad \text{pre} \quad i = 0, 1, \ldots \tag{6}$$

konverguje k jedinému koreňu α rovnice $x = \varphi(x)$ a platí odhad

$$|x_n - \alpha| \leq \frac{\lambda}{1-\lambda}|x_n - x_{n-1}|, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{7}$$

Zo vzťahu (7) vyplýva, že iteračný proces pri zadanej presnosti ε ukončíme, keď platí $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \varepsilon$. Potom $\alpha \approx x_n$.

Príklad

Prostou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ *s presnosťou 0,005.*

Rovnica $x^3 - x - 1 = 0$ má jediný reálny koreň $\alpha \in (1; 2)$. Danú rovnicu môžeme zapísať v tvare

$$x = \sqrt[3]{x + 1} = \varphi(x).$$

Príklad

Prostou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ *s presnosťou 0,005.*

Rovnica $x^3 - x - 1 = 0$ má jediný reálny koreň $\alpha \in (1;2)$. Danú rovnicu môžeme zapísať v tvare

$$x = \sqrt[3]{x+1} = \varphi(x).$$

Dostávame

$$|\varphi'(x)| = |\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}, \qquad \max_{x \in \langle 1,2 \rangle} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0,21.$$

Na určenie približnej hodnoty koreňa α použijeme iteračný proces $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}, \quad i = 0, 1, \ldots$. Za začiatočnú hodnotu zvoľme napríklad $x_0 = 1{,}5$. Iteračný proces ukončíme, keď $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \varepsilon \approx 0,0188$.

Príklad

Prostou iteračnou metódou vypočítajme reálny koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ s presnosťou 0,005.

Rovnica $x^3 - x - 1 = 0$ má jediný reálny koreň $\alpha \in (1;2)$. Danú rovnicu môžeme zapísať v tvare

$$x = \sqrt[3]{x+1} = \varphi(x).$$

Dostávame

$$|\varphi'(x)| = |\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}| = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}, \qquad \max_{x\in\langle 1,2\rangle} |\varphi'(x)| = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}} \approx 0,21.$$

Na určenie približnej hodnoty koreňa α použijeme iteračný proces $x_{n+1} = \sqrt[3]{x_n + 1}, \quad i = 0, 1, \dots$. Za začiatočnú hodnotu zvoľme napríklad $x_0 = 1{,}5$. Iteračný proces ukončíme, keď $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \varepsilon \approx 0,0188$.

Dostávame tieto iterácie:

n	x_n	$\lvert x_n - x_{n-1}\rvert$
0	1,5	
1	1,3572	$0,1428$
2	1,3308	$0,0264$
3	1,3259	$0,0049 < 0,0188$

Keďže $|x_n - x_{n-1}| < \frac{1-\lambda}{\lambda} \cdot \varepsilon$, môžeme s presnosťou aspoň 0,005 aproximovať koreň rovnice $x^3 - x - 1 = 0$ pomocou x_3. Teda $\alpha \approx 1{,}3259$.

Príklad

Separujte všetky reálne korene rovnice $x^4 - 7x - 7 = 0$. *Metódou prostej iterácie nájdite všetky korene s presnosťou* $\varepsilon = 10^{-3}$.

Riešenie sústav nelineárnych rovníc

Budeme sa zaoberať niektorými numerickými metódami riešenia sústavy n nelineárnych rovníc o n neznámych

$$\overline{f}(\overline{x}) = \overline{0}, \tag{8}$$

kde $\overline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)^T$ je vektorová funkcia n nezávislých premenných x_1, x_2, ..., x_n. Túto sústavu môžeme v zložkách zapísať v tvare

$$f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Budeme predpokladať, že vektorová funkcia $\overline{f}$ je definovaná na neprázdnej množine $G \subset \mathbb{R}^n$. Riešiť sústavu (8) znamená nájsť všetky také body $\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^T \in G$, pre ktoré platí $\overline{f}(\overline{\alpha}) = \overline{0}$. Bod $\overline{\alpha}$ nazývame riešením uvedenej sústavy. Separáciou vektora $\overline{\alpha}$ rozumieme určenie takej ohraničenej, uzavretej oblasti $D \subset G$, do ktorej patrí jediné riešenie $\overline{\alpha}$.

Newtonova metóda

Označme $\overline{f}'$ tzv. Jacobiovu maticu zobrazenia $\overline{f}$, potom

$$\overline{f}'(\overline{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1(\overline{x})}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2(\overline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2(\overline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2(\overline{x})}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n(\overline{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Ak pre každé $\overline{x} \in D$, je $\det(\overline{f}'(\overline{x})) \neq 0$, má daná sústava rovníc jediné riešenie. Ak $\overline{x}^{(k)}$ je k-tá iterácia vektora $\overline{\alpha}$, potom vektor $\overline{x}^{(k+1)}$ nájdeme použitím Taylorovej vety pre funkciu n premenných.

Pre názornosť uvedieme postup konštrukcie pre $n = 2$. Riešme túto sústavu rovníc

$$f_1(x, y) = 0,$$

$$f_2(x, y) = 0.$$

Použitím Taylorovej vety dostávame

$$f_i(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) = f_i(x^{(k)}, y^{(k)}) +$$

$$+\frac{\partial f_i(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_i(\overline{x}^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) + R_i,$$

kde $i = 1, 2$.

Pre názornosť uvedieme postup konštrukcie pre $n = 2$. Riešme túto sústavu rovníc

$$f_1(x, y) = 0,$$

$$f_2(x, y) = 0.$$

Použitím Taylorovej vety dostávame

$$f_i(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}) = f_i(x^{(k)}, y^{(k)}) +$$

$$+\frac{\partial f_i(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_i(\overline{x}^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) + R_i,$$

kde $i = 1, 2$. V každej z rovníc zanedbáme zvyšky R_1, R_2 a $f_i(x_1^{(k+1)}, x_2^{(k+1)})$. Ďalšiu aproximáciu dostaneme riešením sústavy lineárnych rovníc

$$\frac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) = -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}),$$

$$\frac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x}(x^{(k+1)} - x^{(k)}) + \frac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y}(y^{(k+1)} - y^{(k)}) = -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}).$$

Dostávame sústavu 2 lineárnych rovníc s neznámymi $(x^{(k+1)} - x^{(k)})$ a $(y^{(k+1)} - y^{(k)})$, ktorú môžeme riešiť napr. Cramerovým pravidlom.

Označme

$$W_1^{(k)} = \begin{vmatrix} -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) & \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \\ -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) & \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad W_2^{(k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{vmatrix},$$

$$W^{(k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Označme

$$W_1^{(k)} = \begin{vmatrix} -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) & \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \\ -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) & \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \end{vmatrix}, \quad W_2^{(k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & -f_1(x^{(k)}, y^{(k)}) \\ \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & -f_2(x^{(k)}, y^{(k)}) \end{vmatrix},$$

$$W^{(k)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2(x^{(k)}, y^{(k)})}{\partial y} \end{vmatrix}.$$

Potom

$$x^{(k+1)} - x^{(k)} = \frac{W_1^{(k)}}{W^{(k)}} \Rightarrow x^{(k+1)} = x^{(k)} + \frac{W_1^{(k)}}{W^{(k)}},$$

$$y^{(k+1)} - y^{(k)} = \frac{W_2^{(k)}}{W^{(k)}} \Rightarrow y^{(k+1)} = y^{(k)} + \frac{W_2^{(k)}}{W^{(k)}}.$$

Iteračný proces ukončíme, keď

$$\|\overline{x}^{(k+1)} - \overline{(k)}\| = \max\{|x^{(k+1)} - x^{(k)}|, |y^{(k+1)} - y^{(k)}|\} < \varepsilon.$$

Príklad

Urobme 3 iterácie Newtonovej metódy z bodu $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0, 0)$ *a určme chybu.*

$$f_1(x, y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$f_2(x, y) = x^2 + 5y - 4 = 0.$$

Príklad

Urobme 3 iterácie Newtonovej metódy z bodu $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0, 0)$ *a určme chybu.*

$$f_1(x, y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$f_2(x, y) = x^2 + 5y - 4 = 0.$$

Riešenie.

$$W(x, y) = \begin{vmatrix} 2x + 4 & -2y - 2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}, \quad W_1(x, y) = \begin{vmatrix} -x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 & -2y - 2 \\ -x^2 - 5y + 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$W_2(x, y) = \begin{vmatrix} 2x + 4 & -x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 \\ 2x & -x^2 - 5y + 4 \end{vmatrix}.$$

Príklad

Urobme 3 iterácie Newtonovej metódy z bodu $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0,0)$ *a určme chybu.*

$$f_1(x,y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$f_2(x,y) = x^2 + 5y - 4 = 0.$$

Riešenie.

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -2y-2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}, \quad W_1(x,y) = \begin{vmatrix} -x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 & -2y-2 \\ -x^2 - 5y + 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$W_2(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 \\ 2x & -x^2 - 5y + 4 \end{vmatrix}.$$

Pre $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$ dostávame

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, \quad W_1^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 13, \quad W_2^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

Príklad

Urobme 3 iterácie Newtonovej metódy z bodu $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0,0)$ *a určme chybu.*

$$f_1(x,y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$f_2(x,y) = x^2 + 5y - 4 = 0.$$

Riešenie.

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -2y-2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}, \quad W_1(x,y) = \begin{vmatrix} -x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 & -2y-2 \\ -x^2 - 5y + 4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$W_2(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -x^2 - 4x + y^2 + 2y + 1 \\ 2x & -x^2 - 5y + 4 \end{vmatrix}.$$

Pre $x^{(0)} = 0,\ y^{(0)} = 0$ dostávame

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, \quad W_1^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 13, \quad W_2^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

Dostávame
$x^{(1)} = 0 + \frac{13}{20} = 0,65;$
$y^{(1)} = 0 + \frac{16}{20} = 0,8.$

Príklad

Urobme 3 iterácie Newtonovej metódy z bodu $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (0,0)$ *a určme chybu.*

$$f_1(x,y) = x^2 + 4x - y^2 - 2y - 1 = 0,$$

$$f_2(x,y) = x^2 + 5y - 4 = 0.$$

Riešenie.

$$W(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -2y-2 \\ 2x & 5 \end{vmatrix}, \quad W_1(x,y) = \begin{vmatrix} -x^2-4x+y^2+2y+1 & -2y-2 \\ -x^2-5y+4 & 5 \end{vmatrix}$$

$$W_2(x,y) = \begin{vmatrix} 2x+4 & -x^2-4x+y^2+2y+1 \\ 2x & -x^2-5y+4 \end{vmatrix}.$$

Pre $x^{(0)} = 0$, $y^{(0)} = 0$ dostávame

$$W^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix} = 20, \quad W_1^{(0)} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 13, \quad W_2^{(0)} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 16.$$

Dostávame
$x^{(1)} = 0 + \frac{13}{20} = 0,65;$
$y^{(1)} = 0 + \frac{16}{20} = 0,8.$

k	$x^{(k)}$	$y^{(k)}$
0	0	0
1	0,65	0,8
2	0,63609	0,71911
3	0,637108	0,71881

Chyba je $\max\{|x^{(3)} - x^{(2)}|, |y^{(3)} - y^{(2)}|\} = \max\{0,001018;\ 0,0003\} = 0,0003.$

Aproximácia funkcií

V tejto kapitole sa budeme zaoberať aproximáciou, t. j. náhradou funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ pomocou funkcie $g : A \subset B \to \mathbb{R}$. Funkciu g zvolíme podľa toho, čo vieme o funkcii f. Funkcia f môže byť zadaná napríklad funkčnými hodnotami v $n+1$ bodoch alebo je príliš zložitá a na riešenie danej úlohy (napríklad výpočet určitého integrálu) nevhodná. Funkciu g obyčajne hľadáme v tvare

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(x).$$

Aproximácia funkcií

V tejto kapitole sa budeme zaoberať aproximáciou, t. j. náhradou funkcie $f : A \to \mathbb{R}$ pomocou funkcie $g : A \subset B \to \mathbb{R}$. Funkciu g zvolíme podľa toho, čo vieme o funkcii f. Funkcia f môže byť zadaná napríklad funkčnými hodnotami v $n+1$ bodoch alebo je príliš zložitá a na riešenie danej úlohy (napríklad výpočet určitého integrálu) nevhodná. Funkciu g obyčajne hľadáme v tvare

$$g(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i \cdot g_i(x).$$

Za funkcie g_i, $i = 0, 1, \ldots, n$ berieme väčšinou funkcie 1, x, x^2, x^3, ..., alebo funkcie 1, $\cos \frac{\pi x}{l}$, $\sin \frac{\pi x}{l}$, ..., $\cos \frac{n\pi x}{l}$, $\sin \frac{n\pi x}{l}$. Koeficienty c_i určujeme na základe nejakého vhodného kritéria. Podľa voľby kritéria dostávame určitý typ aproximácie. Napríklad:

a) Interpolácia (napr. pomocou Lagrangeovho alebo Čebyševových polynómov).

b) Aproximácia metódou najmenších štvorcov.

Nech funkcia f je zadaná svojimi funkčnými hodnotami v $n+1$ bodoch, t. j. tabuľkou hodnôt

x	x_0	x_1	x_2	$\dots$	x_n
$f(x)$	$f(x_0)$	$f(x_1)$	$f(x_2)$	$\dots$	$f(x_n)$

Základnou úlohou interpolácie pomocou polynómov je určiť polynóm P najmenšieho možného stupňa tak, aby pre $i = 0, 1, \dots, n$ platilo

$$f^{(j)}(x_i) = P^{(j)}(x_i), \quad j = 0, 1, \dots, r_i - 1.$$

Budeme sa zaoberať aproximáciami, kde $r_i = 1$ pre $i = 0,\ 1,\ \dots,\ n$, t. j. hľadáme polynóm P najviac n-tého stupňa s vlastnosťou

$$f(x_i) = P(x_i), \quad i = 0, 1, \dots, n. \tag{9}$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

Funkciu f zadanú v $n+1$ bodoch aproximujeme pomocou polynómu tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot g_i(x) \tag{10}$$

tak, aby platilo

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Body x_i nazývame uzlovými bodmi.

Lagrangeov interpolačný polynóm

Funkciu f zadanú v $n+1$ bodoch aproximujeme pomocou polynómu tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot g_i(x) \tag{10}$$

tak, aby platilo

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Body x_i nazývame uzlovými bodmi.

Funkcie g_i zvolíme tak, aby platilo $g_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{pre } i = j, \\ 0, & \text{pre } i \neq j. \end{cases}$

Lagrangeov interpolačný polynóm

Funkciu f zadanú v $n+1$ bodoch aproximujeme pomocou polynómu tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot g_i(x) \tag{10}$$

tak, aby platilo

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Body x_i nazývame uzlovými bodmi.

Funkcie g_i zvolíme tak, aby platilo $g_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{pre } i = j, \\ 0, & \text{pre } i \neq j. \end{cases}$ Keďže $g_i(x_j) = 0$ pre $j \neq i$, dostávame

$$g_i(x) = C_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n),$$

kde C_i je reálna konštanta, ktorú vypočítame z podmienky $g_i(x_i) = 1$, t. j.

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Lagrangeov interpolačný polynóm

Funkciu f zadanú v $n+1$ bodoch aproximujeme pomocou polynómu tvaru

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot g_i(x) \tag{10}$$

tak, aby platilo

$$L_n(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Body x_i nazývame uzlovými bodmi.

Funkcie g_i zvolíme tak, aby platilo $g_i(x_j) = \begin{cases} 1, & \text{pre } i = j, \\ 0, & \text{pre } i \neq j. \end{cases}$ Keďže $g_i(x_j) = 0$ pre $j \neq i$, dostávame

$$g_i(x) = C_i(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n),$$

kde C_i je reálna konštanta, ktorú vypočítame z podmienky $g_i(x_i) = 1$, t. j.

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)}$$

Potom polynóm $L_n(x)$ má tvar

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(x-x_0)\ldots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\ldots(x-x_n)}{(x_i-x_0)\ldots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\ldots(x_i-x_n)} \cdot f(x_i).$$

Príklad 1

Nahraďte funkciu pomocou Lagrangeovho polynómu a vypočítajte približnú hodnotu funkcie f v bode $x = 3$, ak sú zadané hodnoty funkcie $f : \langle 1, 4\rangle \to \mathbb{R}$ tabuľkou:

x	1	2	4
$f(x)$	2	3	11

.

Príklad 1

Nahraďte funkciu pomocou Lagrangeovho polynómu a vypočítajte približnú hodnotu funkcie f v bode $x = 3$, ak sú zadané hodnoty funkcie $f : \langle 1, 4\rangle \to \mathbb{R}$ tabuľkou:

x	1	2	4
$f(x)$	2	3	11

.

Pre $n = 2$ máme

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot f(x_2).$$

Príklad 1

Nahraďte funkciu pomocou Lagrangeovho polynómu a vypočítajte približnú hodnotu funkcie f v bode $x = 3$, ak sú zadané hodnoty funkcie $f : \langle 1, 4 \rangle \to \mathbb{R}$ tabuľkou:

x	1	2	4
$f(x)$	2	3	11

Pre $n = 2$ máme

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} \cdot f(x_2).$$

Vzhľadom na zadané hodnoty dostávame

$$L_2(x) = \frac{(x - 2)(x - 4)}{(1 - 2)(1 - 4)} \cdot 2 + \frac{(x - 1)(x - 4)}{(2 - 1)2 - 4)} \cdot 3 + \frac{(x - 1)(x - 2)}{(4 - 1)(4 - 2)} \cdot 11 = x^2 - 2x + 3.$$

Príklad 1

Nahraďte funkciu pomocou Lagrangeovho polynómu a vypočítajte približnú hodnotu funkcie f v bode $x = 3$, ak sú zadané hodnoty funkcie $f : \langle 1, 4\rangle \to \mathbb{R}$ tabuľkou:

x	1	2	4
$f(x)$	2	3	11

.

Pre $n = 2$ máme

$$L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} \cdot f(x_0) + \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} \cdot f(x_1) + \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)} \cdot f(x_2).$$

Vzhľadom na zadané hodnoty dostávame

$$L_2(x) = \frac{(x-2)(x-4)}{(1-2)(1-4)} \cdot 2 + \frac{(x-1)(x-4)}{(2-1)2-4)} \cdot 3 + \frac{(x-1)(x-2)}{(4-1)(4-2)} \cdot 11 = x^2 - 2x + 3.$$

Pre $x = 3$ dostávame

$$L_2(3) = \frac{(3-2)(3-4)}{(1-2)(1-4)} \cdot 2 + \frac{(3-1)(3-4)}{(2-1)(2-4)} \cdot 3 + \frac{(3-1)(3-2)}{(4-1)(4-2)} \cdot 11 = 6.$$

Inverzný Lagrangeov polynóm

Nech hodnota y^* sa nachádza medzi uzlovými hodnotami y_i a chceme určiť odpovedajúcu hodnotu x^*. Teda vlastne chceme riešiť rovnicu $f(x) = y^*$. Pomocou inverznej funkcie f^{-1} (ak by existovala), by sme dostali $x^* = f^{-1}(y^*)$. V tejto situácii sú možné dva prístupy k určeniu hodnoty x^*, ktoré môžu viesť k rôznym výsledkom:

1. Určíme Lagrangeov interpolačný polynóm $L_n(x)$, a potom namiesto rovnice $f(x) = y^*$ riešime algebrickú rovnicu $L_n(x) = y^*$, čo vedie k riešeniu algebrickej rovnice.

Inverzný Lagrangeov polynóm

Nech hodnota y^* sa nachádza medzi uzlovými hodnotami y_i a chceme určiť odpovedajúcu hodnotu x^*. Teda vlastne chceme riešiť rovnicu $f(x) = y^*$. Pomocou inverznej funkcie f^{-1} (ak by existovala), by sme dostali $x^* = f^{-1}(y^*)$. V tejto situácii sú možné dva prístupy k určeniu hodnoty x^*, ktoré môžu viesť k rôznym výsledkom:

1. Určíme Lagrangeov interpolačný polynóm $L_n(x)$, a potom namiesto rovnice $f(x) = y^*$ riešime algebrickú rovnicu $L_n(x) = y^*$, čo vedie k riešeniu algebrickej rovnice.
2. Inverznú funkciu $f^{-1}(y)$ interpolujeme pomocou tzv. inverzného Lagrangeovho polynómu, ktorý označíme $L_n^{-1}(y)$ a približnú hodnotu x^* určíme ako $x^* = L_n^{-1}(y^*)$. Tento postup je často jednoduchší. Vzorec pre inverzný Lagrangeov polynóm získame jednoduchou výmenou premenných x a y vo vzorci pre Lagrangeov polynóm prenmennej x.

$$L_n^{-1}(y) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(y-y_0)\dots(y-y_{i-1})(y-y_{i+1})\dots(y-y_n)}{(y_i-y_0)\dots(y_i-y_{i-1})(y_i-y_{i+1})\dots(y_i-y_n)} \cdot x_i .$$

Príklad 2

Vypočítajme približnú hodnotu x, pre ktorú funkcia daná tabuľkou

x	-3	-2	0	1
y	4	3	-1	-5

nadobúda hodnotu $y^* = -3$.
Inverzný Lagrangeov polynóm má tvar

$$L_3^{-1}(y) = -3 \cdot \frac{(y-3)(y+1)(y+5)}{(4-3)(4+1)(4+5)} - 2 \cdot \frac{(y-4)(y+1)(y+5)}{(3-4)(3+1)(3+5)}$$
$$+0 \cdot \frac{(y-4)(y-3)(y+5)}{(-1-4)(-1-3)(-1+5)} + 1 \cdot \frac{(y-4)(y-3)(y+1)}{(-5-4)(-5-3)(-5+1)}$$

Príklad 2

Vypočítajme približnú hodnotu x, pre ktorú funkcia daná tabuľkou

x	-3	-2	0	1
y	4	3	-1	-5

nadobúda hodnotu $y^* = -3$.
Inverzný Lagrangeov polynóm má tvar

$$L_3^{-1}(y) = -3 \cdot \frac{(y-3)(y+1)(y+5)}{(4-3)(4+1)(4+5)} - 2 \cdot \frac{(y-4)(y+1)(y+5)}{(3-4)(3+1)(3+5)}$$
$$+0 \cdot \frac{(y-4)(y-3)(y+5)}{(-1-4)(-1-3)(-1+5)} + 1 \cdot \frac{(y-4)(y-3)(y+1)}{(-5-4)(-5-3)(-5+1)}$$

Pre $y^* = -3$ dostávame

$$x^* = L_3^{-1}(-3) = -3 \cdot \frac{(-3-3)(-3+1)(-3+5)}{(4-3)(4+1)(4+5)} -$$
$$-2 \cdot \frac{(-3-4)(-3+1)(-3+5)}{(3-4)(3+1)(3+5)} + 0 \cdot \frac{(-3-4)(-3-3)(-3+5)}{(-1-4)(-1-3)(-1+5)} +$$
$$+1 \cdot \frac{(-3-4)(-3-3)(-3+1)}{(-5-4)(-5-3)(-5+1)} \approx 0{,}841666.$$

Metóda najmenších štvorcov

Nech namerané tabuľkové hodnoty (x_i, y_i), $i = 0, 1, \dots, n$ sú vyjadrením závislosti x a y, kde x_i sú zvolené hodnoty pri ktorých sme robili merania a y_i je nameraná hodnota funkcie $f(x)$ v bode x_i, $i = 0, 1, \dots, n$. O závislosti medzi x a y predpokladajme, že má tvar

$$y = \varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),$$

kde $a_0, a_1, \dots, a_k \in \mathbb{R}$ sú neznáme konštanty.
Z množiny všetkých lineárnych funkcií

$$V_k = \{a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

chceme nájsť tú, ktorá najpresnejšie aproximuje funkciu zadanú pomocou tabuľky jej nameraných hodnôt.

Metóda najmenších štvorcov

Nech namerané tabuľkové hodnoty (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ sú vyjadrením závislosti x a y, kde x_i sú zvolené hodnoty pri ktorých sme robili merania a y_i je nameraná hodnota funkcie $f(x)$ v bode x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. O závislosti medzi x a y predpokladajme, že má tvar

$$y = \varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ sú neznáme konštanty.
Z množiny všetkých lineárnych funkcií

$$V_k = \{a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

chceme nájsť tú, ktorá najpresnejšie aproximuje funkciu zadanú pomocou tabuľky jej nameraných hodnôt. Určíme také reálne koeficienty a_0, a_1, $\ldots$, a_k, pre ktoré je hodnota funkcie

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2$$

minimálna.

Metóda najmenších štvorcov

Nech namerané tabuľkové hodnoty (x_i, y_i), $i = 0, 1, \ldots, n$ sú vyjadrením závislosti x a y, kde x_i sú zvolené hodnoty pri ktorých sme robili merania a y_i je nameraná hodnota funkcie $f(x)$ v bode x_i, $i = 0, 1, \ldots, n$. O závislosti medzi x a y predpokladajme, že má tvar

$$y = \varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),$$

kde $a_0, a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}$ sú neznáme konštanty.
Z množiny všetkých lineárnych funkcií

$$V_k = \{a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_k\varphi_k(x),\ a_i \in \mathbb{R}\}$$

chceme nájsť tú, ktorá najpresnejšie aproximuje funkciu zadanú pomocou tabuľky jej nameraných hodnôt. Určíme také reálne koeficienty a_0, a_1, ..., a_k, pre ktoré je hodnota funkcie

$$S(a_0, a_1, \ldots, a_k) = \sum_{i=0}^{n} [\varphi(x_i) - y_i]^2$$

minimálna. Koeficienty a_0, a_1, ..., a_k určíme riešením sústavy rovníc

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, k.$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 1$, teda $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$.

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i]^2,$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 1$, teda $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$.

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i]^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i] \cdot \varphi_0(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i] \cdot \varphi_1(x_i).$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 1$, teda $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$.

$$S(a_0, a_1) = \sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i]^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i] \cdot \varphi_0(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n} [a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) - y_i] \cdot \varphi_1(x_i).$$

Tieto parciálne derivácie sa rovnajú nule práve vtedy, ak platí:

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_1(x_i).$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 2$:

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i)$$

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i]^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_0(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_1(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_2(x_i).$$

Odvodíme sústavu rovníc pre prípad $k = 2$:

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i)$$

$$S(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i]^2,$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 2\sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_0(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_1} = 2\sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_1(x_i),$$

$$\frac{\partial S}{\partial a_2} = 2\sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + a_1\varphi_1(x_i) + a_2\varphi_2(x_i) - y_i] \cdot \varphi_2(x_i).$$

Tieto parciálne derivácie sa rovnajú nule práve vtedy, ak platí:

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_0(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_0(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i)\varphi_0(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_0(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_1(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_1(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i)\varphi_1(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_1(x_i),$$

$$a_0 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_0(x_i)\varphi_2(x_i) + a_1 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_1(x_i)\varphi_2(x_i) + a_2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \varphi_2(x_i)\varphi_2(x_i) = \sum_{i=0}^{n} y_i\varphi_2(x_i).$$

Príklad 3

Polynómom prvého a druhého stupňa aproximujme funkciu, danú tabuľkou

x_i	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1	1,1
y_i	3,45	3,54	4,1	4,35	4,6	5,05	5,14

.

Príklad 3

Polynómom prvého a druhého stupňa aproximujme funkciu, danú tabuľkou

x_i	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1	1,1
y_i	3,45	3,54	4,1	4,35	4,6	5,05	5,14

Uvažujme najprv aproximáciu pomocou lineárnej funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x.$$

Máme $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$. Teoretická sústava rovníc má tvar

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Príklad 3

Polynómom prvého a druhého stupňa aproximujme funkciu, danú tabuľkou

x_i	0,2	0,3	0,5	0,7	0,8	1	1,1
y_i	3,45	3,54	4,1	4,35	4,6	5,05	5,14

.

Uvažujme najprv aproximáciu pomocou lineárnej funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x.$$

Máme $\varphi_0 = 1$, $\varphi_1 = x$. Teoretická sústava rovníc má tvar

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} 1 \cdot y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot x_i = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_i.$$

Po dosadení hodnôt z tabuľky dostávame

$$7a_0 + 4{,}6a_1 = 30{,}23,$$

$$4{,}6a_0 + 3{,}72a_1 = 21{,}231.$$

Riešením tejto sústavy je $a_0 = 3{,}03135$, $a_1 = 1{,}9588$, teda

$$\varphi(x) = 3{,}03135 + 1{,}9588x.$$

Podobne postupujeme pri aproximácii pomocou funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Uvažujeme

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x,\ \varphi_2 = x^2.$$

Podobne postupujeme pri aproximácii pomocou funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Uvažujeme

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x,\ \varphi_2 = x^2.$$

Dostávame sústavu rovníc

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i.$$

Podobne postupujeme pri aproximácii pomocou funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Uvažujeme

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x,\ \varphi_2 = x^2.$$

Dostávame sústavu rovníc

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i.$$

Potom pre zadané tabuľkové hodnoty dostávame

$$7a_0 + 4{,}6a_1 + 3{,}72a_2 = 30{,}23,$$

$$4{,}6a_0 + 3{,}72a_1 + 3{,}42a_2 = 21{,}231,$$

$$3{,}72a_0 + 3{,}42a_1 + 3{,}186a_2 = 17{,}8265.$$

Podobne postupujeme pri aproximácii pomocou funkcie

$$\varphi(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2.$$

Uvažujeme

$$\varphi_0 = 1,\ \varphi_1 = x,\ \varphi_2 = x^2.$$

Dostávame sústavu rovníc

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} 1 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 = \sum_{i=0}^{n} y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 = \sum_{i=0}^{n} x_i y_i,$$

$$a_0 \sum_{i=0}^{n} x_i^2 + a_1 \sum_{i=0}^{n} x_i^3 + a_2 \sum_{i=0}^{n} x_i^4 = \sum_{i=0}^{n} x_i^2 y_i.$$

Potom pre zadané tabuľkové hodnoty dostávame

$$7a_0 + 4{,}6a_1 + 3{,}72a_2 = 30{,}23,$$

$$4{,}6a_0 + 3{,}72a_1 + 3{,}42a_2 = 21{,}231,$$

$$3{,}72a_0 + 3{,}42a_1 + 3{,}186a_2 = 17{,}8265.$$

Riešením sústavy dostávame $a_0 = 3{,}4033,\ a_1 = 0{,}61756,\ a_2 = 0{,}9586.$
Potom $\varphi(x) = 3{,}4033 + 0{,}61756x + 0{,}9586x^2.$

Numerický výpočet určitého integrálu

Budeme sa zaoberať numerickými metódami výpočtu

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

kde $a < b$ sú reálne čísla a predpokladáme, že funkcia $f : \langle a, b\rangle \to \mathbb{R}$ je integrovateľná na $\langle a, b\rangle$. Interval $I = \langle a, b\rangle$ rozdelíme na n intervalov rovnakej dĺžky uzlovými bodmi

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b,$$

kde $x_i = x_0 + i \cdot h$, $i = 0, 1, \ldots, n$ a $h = \dfrac{x_n - x_0}{n} = \dfrac{b-a}{n}$ je konštantný krok.

Nech pre prirodzené čísla s a n_1 platí $n = s \cdot n_1$. Budeme uvažovať len prípady $s = 1$, t. j. $n = n_1$ a $s = 2$, t. j. $n = 2\,n_1$. Z vlastností určitého integrálu dostávame

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_0+sh} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{x_0+sh}^{x_0+2sh} f(x)\,\mathrm{d}x + \cdots + \int_{x_0+(n_1-1)sh}^{x_n} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

Uvedieme tzv. elementárne vzorce, vzťahujúce sa na interval $\langle x_0, x_0 + sh\rangle$. Vzorce sa dajú získať napríklad integrovaním interpolačných polynómov.

Lichobežníková metóda

Uvažujme prípad $s = 1$, teda interval $\langle x_0, x_0 + h \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$. Na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom prvého stupňa

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1).$$

Lichobežníková metóda

Uvažujme prípad $s = 1$, teda interval $\langle x_0, x_0 + h\rangle = \langle x_0, x_1\rangle$. Na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom prvého stupňa

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1).$$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ je teda nahradený obsahom lichobežníka so základňami $f(x_i),\ f(x_{i+1})$ a výškou h, teda

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})].$$

Toto je elementárny vzorec tzv. lichobežníkovej metódy.

Lichobežníková metóda

Uvažujme prípad $s = 1$, teda interval $\langle x_0, x_0 + h \rangle = \langle x_0, x_1 \rangle$. Na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom prvého stupňa

$$L_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot f(x_1).$$

$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x$ je teda nahradený obsahom lichobežníka so základňami $f(x_i)$, $f(x_{i+1})$ a výškou h, teda

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{h}{2} \cdot [f(x_i) + f(x_{i+1})].$$

Toto je elementárny vzorec tzv. lichobežníkovej metódy.
Súčtom elementárnych vzorcov dostávame:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx L(n) = \frac{h}{2} \cdot \left[f(a) + f(b) + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i) \right]. \tag{13}$$

Horný odhad chyby je

$|R_L(n)| \leq \frac{b-a}{12} M_2 h^2$, resp. $|R_L(n)| \leq \frac{(b-a)^3 M_2}{12 n^2}$, kde $M_2 \geq \max_{x \in \langle a,b \rangle} |f''(x)|$.

Simpsonova metóda

V prípade $s = 2$ (n je párne) bude interval $\langle x_0, x_0 + 2h\rangle = \langle x_0, x_2\rangle$. Ak na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom druhého stupňa s uzlovými bodmi x_0, x_1 a x_2, dostaneme približnú hodnotu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\cdot[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)].$$

Toto je elementárny vzorec tzv. Simpsonovej metódy. Zovšeobecnenie:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} L_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\cdot[f(x_i) + 4\,f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})].$$

Sčítaním vyššie uvedených základných vzorcov dostávame

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + f(b) + 4\cdot\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right].$$

Simpsonova metóda

V prípade $s = 2$ (n je párne) bude interval $\langle x_0, x_0 + 2h\rangle = \langle x_0, x_2\rangle$. Ak na tomto intervale budeme aproximovať funkciu $f(x)$ Lagrangeovým polynómom druhého stupňa s uzlovými bodmi x_0, x_1 a x_2, dostaneme približnú hodnotu

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_0}^{x_2} L_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\cdot[f(x_0) + 4\,f(x_1) + f(x_2)].$$

Toto je elementárny vzorec tzv. Simpsonovej metódy. Zovšeobecnenie:

$$\int_{x_i}^{x_{i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \int_{x_i}^{x_{i+2}} L_2(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{3}\cdot[f(x_i) + 4\,f(x_{i+1}) + f(x_{i+2})].$$

Sčítaním vyššie uvedených základných vzorcov dostávame

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx S(n) = \frac{h}{3}\cdot\left[f(a) + f(b) + 4\cdot\sum_{i=1}^{n/2} f(x_{2i-1}) + 2\cdot\sum_{i=1}^{n/2-1} f(x_{2i})\right].$$

Označme M_4 horný odhad $|f^{(4)}(x)|$ na intervale $\langle a, b\rangle$: $M_4 \geq \max_{x\in\langle a,b\rangle} |f^{(4)}(x)|$.

Horný odhady chyby pre Simpsonovu metódu pre krok h, resp. pre počet delení n:

$$|R_S(n)| \leq \frac{b-a}{180} M_4 h^4, \quad \text{resp.} \quad |R_S(n)| \leq \frac{(b-a)^5 M_4}{180 n^4}. \qquad (14)$$

Príklad

Vypočítajme pomocou lichobežníkovej metódy a Simpsonovej metódy, s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie. Na určenie kroku h (počtu delení n) použijeme vzťahy (14). Pre $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ je

$$\max_{0\le x\le 1} |f''(x)| \le 6\mathrm{e} = M_2, \quad \text{resp.} \quad \max_{0\le x\le 1} |f^{(4)}(x)| \le 76\mathrm{e} = M_4.$$

Po dosadení do vzťahov pre horné odhady a po porovnaní s presnosťou ε dostávame pre lichobežníkovú metódu $n > 11{,}66$ a pre Simpsonovu metódu $n > 3{,}27$.

Teda pre lichobežníkovú metódu môžeme zvoliť $n = 12$, čiže $h = 1/12$. Dostávame

$$L(12) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{12}\left[\frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1}{2} + \mathrm{e}^{(1/12)^2} + \cdots + \mathrm{e}^{(11/12)^2}\right] \approx 1{,}4658.$$

Príklad

Vypočítajme pomocou lichobežníkovej metódy a Simpsonovej metódy, s presnosťou $\varepsilon = 0{,}01$

$$\int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Riešenie. Na určenie kroku h (počtu delení n) použijeme vzťahy (14). Pre $f(x) = \mathrm{e}^{x^2}$ je

$$\max_{0\le x\le 1} |f''(x)| \le 6\mathrm{e} = M_2, \quad \text{resp.} \quad \max_{0\le x\le 1} |f^{(4)}(x)| \le 76\mathrm{e} = M_4.$$

Po dosadení do vzťahov pre horné odhady a po porovnaní s presnosťou ε dostávame pre lichobežníkovú metódu $n > 11{,}66$ a pre Simpsonovu metódu $n > 3{,}27$.

Teda pre lichobežníkovú metódu môžeme zvoliť $n = 12$, čiže $h = 1/12$. Dostávame

$$L(12) = \int_0^1 \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \approx \frac{1}{12}\left[\frac{\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1}{2} + \mathrm{e}^{(1/12)^2} + \cdots + \mathrm{e}^{(11/12)^2}\right] \approx 1{,}4658.$$

Pre Simpsonovu metódu pri $n = 4$, $h = 0{,}25$ dostávame hodnotu

$$S(4) = \frac{0{,}25}{3}\left[\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^1 + 4(\mathrm{e}^{(0{,}25)^2} + \mathrm{e}^{(0{,}75)^2}) + 2\mathrm{e}^{(0{,}5)^2}\right] \approx 1{,}4637.$$

Aplikácie v praxi vedú často ku Cauchyho úlohe pre diferenciálnu rovnicu n-tého rádu tvaru

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}),$$

so začiatočnými podmienkami

$$y^{(i)}(x_0) = y_{i0}, \qquad i = 0, 1, \dots, n-1.$$

Pri popise jednotlivých metód sa budeme zaoberať obyčajne jednou diferenciálnou rovnicou

$$y'(x) = f\left(x, y(x)\right) \tag{15}$$

so začiatočnou podmienkou

$$y(x_0) = y_0. \tag{16}$$

Postup pri riešení

Pri numerickom riešení úlohy aproximujeme funkčné hodnoty riešenia v uzlových bodoch$a = x_0, x_1, \ldots, x_n = b$. Pre jednoduchosť majme

$$x_i = x_0 + i \cdot h, \qquad i = 0, 1, \ldots, n,$$

kde h je konštanta, ktorú nazývame integračný krok.
Pre presné riešenie začiatočnej úlohy v bode x_i budeme používať označenie $y(x_i)$ a jej približnú hodnotu budeme označovať y_i.
Aproximácia y_{i+1} sa počíta z hodnôt približného riešenia, vypočítaných už v predchádzajúcich uzlových bodoch. Metóda, ktorá k tomuto výpočtu používa k hodnôt $y_{i+1-k}, \ldots, y_{i-1}, y_i$ sa nazýva k-kroková metóda. Ak je $k > 1$, je to *viackroková metóda*.

Integrálny tvar Cauchyho začiatočnej úlohy

Dá sa ukázať, že *presným riešením* Cauchyho začiatočnej úlohy je funkcia $y(x)$, pre ktorú platí

$$y(x) = y(x_0) + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y(t)\right) \mathrm{d}t.$$

Ak za začiatočný bod zvolíme x_i a bod x nahradíme bodom x_{i+1}, dostaneme vzorec

$$y(x_{i+1}) = y(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} f\left(t, y(t)\right) \mathrm{d}t. \tag{17}$$

Integrál na pravej strane (17) teda predstavuje prírastok funkcie $y(x)$ na intervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$.
Približné riešenia y_i dostávame nasledovne:
1. nahradíme $y(x_i)$ a $y(x_{i+1})$ ich aproximáciami y_i a y_{i+1},
2. integrál nahradíme nejakou približnou hodnotou, ktorú označíme K_i.

Z (17) dostávame:

$$y_{i+1} = y_i + K_i, \qquad i = 0,\ 1,\ \ldots$$

Eulerova metóda

Ak si uvedomíme, že na intervale $\langle x_i, x_{i+1} \rangle$ poznáme na začiatku len hodnotu $y(x)$ v bode x_i, hodnotu určitého integrálu na pravej strane (17) nahradíme veľkosťou obdĺžnika so šírkou h a výškou $f(x_i, y_i)$.
Označme teda

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i).$$

Použitím tejto aproximácie integrálu dostávame rekurentný vzorec Eulerovej metódy:

$$y_{i+1} = y_i + k_1, \qquad \text{alebo} \qquad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i). \tag{18}$$

Príklad

Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ *riešte na intervale* $\langle 0; 0,2 \rangle$ *Eulerovou metódou s krokom* $0,1$.

Riešenie. Máme $h = 0,1;\ x_0 = 0;\ y_0 = y(x_0) = 1;\ f(x, y) = 1 + 2(y - x)$.
$x_1 = 0,1;\ y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) = 1 + 0,1 \cdot 3 = 1,3$
$x_2 = 0,2;\ y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) = 1,3 + 0,1 \cdot 3,4 = 1,64.$

$$y(0,2) \approx 1,64.$$

Heunova metóda

Použitím lichobežníkového pravidla dostaneme

$$k_L = \frac{h}{2} \cdot [f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_{i+1})],$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big[f\big(x_i, y(x_i)\big) + f\big(x_{i+1}, y(x_{i+1})\big)\Big]. \tag{19}$$

Tento vzťah je *implicitný*, pretože neznáma hodnota y_{i+1} nie je explicitne vyjadrená. Na jej určenie je vo všeobecnosti potrebné riešiť v každom kroku nelineárnu algebrickú rovnicu.

Nahradíme hodnotu $y(x_i)$ hodnotou y_i a hodnotu $y(x_{i+1})$ hodnotou y_{i+1} vypočítanou pomocou Eulerovej metódy $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i)$.

Potom pre $i = 0, 1, \ldots,$ dostaneme

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\Big[f\big(x_i, y_i\big) + f\big(x_i + h, y_i + k_1\big)\Big] = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

kde

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \quad k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1).$$

Teda iteračný vzťah pre Heunovu metódu je

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + k_2}{2}. \tag{20}$$

Príklad

Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ *riešte na intervale* $\langle 0; 0,2 \rangle$ *Heunovou metódou s krokom* $0,1$.

Príklad

Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ *riešte na intervale* $\langle 0; 0,2\rangle$ *Heunovou metódou s krokom* $0,1$.

Riešenie. Máme $h = 0,1;\ x_0 = 0;\ y_0 = y(x_0) = 1;\ f(x,y) = 1 + 2(y - x)$.
$i = 0:\ k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0;1) = 0,1 \cdot 3 = 0,3;$
$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,1; 1,3) = 0,1 \cdot 3,4 = 0,34$

Príklad

Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ *riešte na intervale* $\langle 0; 0,2 \rangle$ *Heunovou metódou s krokom* $0,1$.

Riešenie. Máme $h = 0,1$; $x_0 = 0$; $y_0 = y(x_0) = 1$; $f(x,y) = 1 + 2(y - x)$.

$i = 0:$ $k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0;1) = 0,1 \cdot 3 = 0,3$;

$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,1; 1,3) = 0,1 \cdot 3,4 = 0,34$

$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} = 1 + \frac{0,3 + 0,34}{2} = 1,32$

Príklad

Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ *riešte na intervale* $\langle 0; 0,2\rangle$ *Heunovou metódou s krokom* $0,1$.

Riešenie. Máme $h = 0,1;\ x_0 = 0;\ y_0 = y(x_0) = 1;\ f(x,y) = 1 + 2(y - x)$.

$i = 0:\ \ k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0;1) = 0,1 \cdot 3 = 0,3;$

$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,1;1,3) = 0,1 \cdot 3,4 = 0,34$

$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} = 1 + \frac{0,3 + 0,34}{2} = 1,32$

$i = 1:\ \ k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0,1 \cdot f(0,1;1,32) = 0,1 \cdot 3,44 = 0,344;$

$k_2 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,2;1,664) = 0,1 \cdot 3,928 = 0,3928$

Príklad

Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ *riešte na intervale* $\langle 0; 0,2 \rangle$ *Heunovou metódou s krokom* $0,1$.

Riešenie. Máme $h = 0,1;\ x_0 = 0;\ y_0 = y(x_0) = 1;\ f(x,y) = 1 + 2(y - x)$.

$i = 0:\ \ k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0;1) = 0,1 \cdot 3 = 0,3;$

$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,1; 1,3) = 0,1 \cdot 3,4 = 0,34$

$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} = 1 + \frac{0,3 + 0,34}{2} = 1,32$

$i = 1:\ \ k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0,1 \cdot f(0,1; 1,32) = 0,1 \cdot 3,44 = 0,344;$

$k_2 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,2; 1,664) = 0,1 \cdot 3,928 = 0,3928$

$y_2 = y_1 + \frac{k_1 + k_2}{2} = 1,32 + \frac{0,344 + 0,3928}{2} = 1,6884$

$$y(0,2) \approx 1,6884$$

Príklad

Cauchyho úlohu $y' = 1 + 2(y - x)$, $y(0) = 1$ *riešte na intervale* $\langle 0; 0,2 \rangle$ *Heunovou metódou s krokom* $0,1$.

Riešenie. Máme $h = 0,1$; $x_0 = 0$; $y_0 = y(x_0) = 1$; $f(x,y) = 1 + 2(y - x)$.

$i = 0$: $k_1 = h \cdot f(x_0, y_0) = 0,1 \cdot f(0;1) = 0,1 \cdot 3 = 0,3$;

$k_2 = h \cdot f(x_0 + h, y_0 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,1; 1,3) = 0,1 \cdot 3,4 = 0,34$

$y_1 = y_0 + \frac{k_1 + k_2}{2} = 1 + \frac{0,3+0,34}{2} = 1,32$

$i = 1$: $k_1 = h \cdot f(x_1, y_1) = 0,1 \cdot f(0,1; 1,32) = 0,1 \cdot 3,44 = 0,344$;

$k_2 = h \cdot f(x_1 + h, y_1 + k_1) = 0,1 \cdot f(0,2; 1,664) = 0,1 \cdot 3,928 = 0,3928$

$y_2 = y_1 + \frac{k_1 + k_2}{2} = 1,32 + \frac{0,344+0,3928}{2} = 1,6884$

$$y(0,2) \approx 1,6884$$

Poznámka. Presná hodnota, vypočítaná metódami s vysokou presnosťou, je $y(2) = 0,6918$ (po zaokrúhlení na 4 desatinné miesta). Vidíme, že Heunova metóda dáva presnejší výsledok ako Eulerova metóda.

Rungeho-Kuttove metódy

Základom skupiny jednokrokových metód, ktoré sa často používajú, je vyjadrenie aproximácie y_{i+1} v tvare

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^{p} w_j\, k_j, \tag{21}$$

kde w_j sú vhodné konštanty a hodnoty k_j sú

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i),$$

$$k_j = h \cdot f\left(x_i + \alpha_j\, h, y_i + \sum_{m=1}^{j-1} \beta_{j,m}\, k_m\right), \quad j = 2, 3, \ldots, p.$$

Hodnoty k_j sú získané z funkčných hodnôt funkcie f vo vhodne zvolených bodoch. Konštanty w_j, α_j, $\beta_{j,m}$ pre $j = 1,\ 2,\ \ldots,\ s$, $m = 1,\ 2,\ \ldots,\ j-1$ určujeme porovnaním pomocou Taylorovho rozvoja. Tak dostaneme metódu rádu p.
Pre rád $p = 2$ dostávame

$$k_1 = h \cdot f(x_i, y_i), \quad k_2 = h \cdot f(x_i + h, y_i + k_1), \quad w_1 = w_2 = \frac{1}{2}.$$

Teda $y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}\, k_1 + \frac{1}{2}\, k_2$, čo je vyššie uvedená Heunova metóda.

Pre $p = 4$ dostávame koeficienty

$$\begin{aligned}
k_1 &= h \cdot f(x_i, y_i),\\
k_2 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_1/2),\\
k_3 &= h \cdot f(x_i + h/2, y_i + k_2/2),\\
k_4 &= h \cdot f(x_i + h, y_i + k_3)
\end{aligned}$$

a iteračný vzťah

$$y_{i+1} = y_i + \frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6}.$$

Príklad

Metódou Rungeho-Kuttovou s krokom $h = 0{,}2$ určme približnú hodnotu $y(0{,}2)$, ak $y(x)$ je riešením začiatočnej úlohy pre diferenciálnu rovnicu

$$y' = x + y, \qquad y(0) = 1.$$

Na výpočet koeficientov k_i môžeme použiť túto schému

$$\begin{array}{l|l|l|c}
x_0 & y_0 & k_1 = hf(x_0, y_0) & k_1 \\
x_0 + \frac{h}{2} & y_0 + \frac{k_1}{2} & k_2 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_1}{2}) & 2k_2 \\
x_0 + \frac{h}{2} & y_0 + \frac{k_2}{2} & k_3 = hf(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{k_2}{2}) & 2k_3 \\
x_0 + h & y_0 + k_3 & k_4 = hf(x_0 + h, y_0 + k_3) & k_4
\end{array}$$

Potom $x_1 = x_0 + h, \quad y_1 = y_0 + K$, kde $K = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$.

Pre $x_0 = 0$; $y_0 = 1$; $h = 0{,}2$; $f(x, y) = x + y$ dostávame

0	1	0,2	0,2
0,1	1,1	0,24	0,48
0,1	1,12	0,244	0,488
0,2	1,244	0,2888	0,2888

Odtiaľ $x_1 = 0{,}2; \quad K = 1{,}4568/6; \quad y(0{,}2) \approx y(0) + K = 1{,}2428.$

TEÓRIA PRAVDEPODOBNOSTI

Princíp násobenia

Ak činnosť pozostáva z k krokov po sebe nasledujúcich a
prvý krok môže byť uskutočnený n_1 spôsobmi,
druhý krok môže byť uskutočnený n_2 spôsobmi,
$\vdots$
k-ty krok môže byť uskutočnený n_k spôsobmi,
tak počet rôznych spôsobov vykonania činnosti je $n_1 \cdot n_2 \ldots n_k$.

Princíp násobenia

Ak činnosť pozostáva z k krokov po sebe nasledujúcich a
prvý krok môže byť uskutočnený n_1 spôsobmi,
druhý krok môže byť uskutočnený n_2 spôsobmi,
$\vdots$
k-ty krok môže byť uskutočnený n_k spôsobmi,
tak počet rôznych spôsobov vykonania činnosti je $n_1 \cdot n_2 \dots n_k$.

Princíp sčítania

Majme množiny $A_1, A_2, \dots, A_k$, ktoré sú po dvojiciach disjunktné. Nech $|A_i| = n_i$.
Potom $|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$.

Permutácie

Nech $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$. Definujeme n-faktoriál a a kombinačné číslo nasledovne:

$$0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \tag{22}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{23}$$

Špeciálne platí

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \qquad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

Permutácie

Nech $n, k \in \mathbb{N}_0, n \geq k$. Definujeme n-faktoriál a a kombinačné číslo nasledovne:

$$0! = 1, \qquad (n+1)! = (n+1) \cdot n! \tag{22}$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{23}$$

Špeciálne platí

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \binom{n}{n} = 1, \quad \binom{0}{0} = 1, \quad \binom{n}{n-1} = n.$$

Permutácie sú usporiadané n-tice prvkov n-prvkovej množiny. Ak sú všetky prvky navzájom rôzne, jedná sa o permutácie bez opakovania. Ak sú niektoré prvky množiny rovnaké, jedná sa o permutácie s opakovaním.

Počet permutácií n-tej triedy bez opakovania je

$$P(n) = n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n \tag{24}$$

Počet permutácií n-tej triedy s opakovaním je

$$P'_{n_1, n_2, \dots, n_c}(n) = \frac{n!}{n_1! n_2! \cdot \ldots \cdot n_c!} \qquad (n_1 + n_2 + \dots + n_c = n) \tag{25}$$

Príklad

Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť tanečné páry z 8 chlapcov and 8 dievčat?

Príklad

Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť tanečné páry z 8 chlapcov and 8 dievčat?

Predstavme si, že chlapci sú zoradení. Počet možností, ako vytvoriť páry sa rovná počtu permutácií z 8 dievčat, teda

$$P(8) = 8! = 40320.$$

Príklad

Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť tanečné páry z 8 chlapcov and 8 dievčat?

Predstavme si, že chlapci sú zoradení. Počet možností, ako vytvoriť páry sa rovná počtu permutácií z 8 dievčat, teda

$$P(8) = 8! = 40320.$$

Príklad

1 Koľko slov (aj neplnovýznamových) môžeme vytvoriť zámenou poradia písmen v slove MATEMATIKA?

Príklad

Koľkými spôsobmi môžeme vytvoriť tanečné páry z 8 chlapcov and 8 dievčat?

Predstavme si, že chlapci sú zoradení. Počet možností, ako vytvoriť páry sa rovná počtu permutácií z 8 dievčat, teda

$$P(8) = 8! = 40320.$$

Príklad

1 Koľko slov (aj neplnovýznamových) môžeme vytvoriť zámenou poradia písmen v slove MATEMATIKA?

Jedná sa o permutácie z 10 prvkov (písmen) s opakovaním. Máme $n_1 = 2$ (písmeno M sa vyskytuje dvakrát), $n_2 = 3$, $n_3 = 2$, $n_4 = n_5 = n_6 = 1$. Dostávame

$$V_{2,3,2,1,1,1} = \frac{10!}{2!3!2!} = 151200.$$

Variácie

Variácie sú usporiadané k-tice z n navzájom rôznych prvkov. Rozoznávame variácie bez opakovania a variácie s opakovaním.
Počet variácií k-tej triedy z n prvkov $(k \leq n)$ je

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{26}$$

V prípade $n = k$ dostávame permutácie.

Variácie

Variácie sú usporiadané k-tice z n navzájom rôznych prvkov. Rozoznávame variácie bez opakovania a variácie s opakovaním.
Počet variácií k-tej triedy z n prvkov $(k \leq n)$ je

$$V(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}. \tag{26}$$

V prípade $n = k$ dostávame permutácie.

Počet variácií k-tej triedy z n prvkov s opakovaním je

$$V'(n,k) = n^k. \tag{27}$$

Pri variáciách s opakovaním môže byť $k > n$.

Príklad

V košíku je banán, jablko a pomaranč. Päť dievčat má chuť na ovocie. Koľkými spôsobmi môžeme dať trom dievčatám po 1 kuse ovocia a dvom nedať žiadne?

Príklad

V košíku je banán, jablko a pomaranč. Päť dievčat má chuť na ovocie. Koľkými spôsobmi môžeme dať trom dievčatám po 1 kuse ovocia a dvom nedať žiadne?

Záleží na tom, ktoré ovocie bude ktorému dievčaťu „priradené“, teda záleží na poradí. Zoberieme banán a dáme ho jednému z 5 dievčat. Môžeme ho vybrať 5 spôsobmi. Jablko dáme ho jednému zo 4 dievčat, čo môžeme urobiť 4 spôsobmi. Pomaranč dáme jednému z 3 dievčat. Máme teda $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.
Pri použitím variácií vytvárame usporiadané trojice z piatich rôznych prvkov, teda $n = 5,\ k = 3$. Podľa (26) dostávame $V(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

Príklad

V košíku je banán, jablko a pomaranč. Päť dievčat má chuť na ovocie. Koľkými spôsobmi môžeme dať trom dievčatám po 1 kuse ovocia a dvom nedať žiadne?

Záleží na tom, ktoré ovocie bude ktorému dievčaťu „priradené“, teda záleží na poradí. Zoberieme banán a dáme ho jednému z 5 dievčat. Môžeme ho vybrať 5 spôsobmi. Jablko dáme ho jednému zo 4 dievčat, čo môžeme urobiť 4 spôsobmi. Pomaranč dáme jednému z 3 dievčat. Máme teda $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.
Pri použitím variácií vytvárame usporiadané trojice z piatich rôznych prvkov, teda $n = 5,\ k = 3$. Podľa (26) dostávame $V(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

Príklad

Koľko podmnožín má 5-prvková množina?

Príklad

V košíku je banán, jablko a pomaranč. Päť dievčat má chuť na ovocie. Koľkými spôsobmi môžeme dať trom dievčatám po 1 kuse ovocia a dvom nedať žiadne?

Záleží na tom, ktoré ovocie bude ktorému dievčaťu „priradené“, teda záleží na poradí. Zoberieme banán a dáme ho jednému z 5 dievčat. Môžeme ho vybrať 5 spôsobmi. Jablko dáme ho jednému zo 4 dievčat, čo môžeme urobiť 4 spôsobmi. Pomaranč dáme jednému z 3 dievčat. Máme teda $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.
Pri použitím variácií vytvárame usporiadané trojice z piatich rôznych prvkov, teda $n = 5$, $k = 3$. Podľa (26) dostávame $V(5,3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

Príklad

Koľko podmnožín má 5-prvková množina?

Označme množinu ako $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Každej podmnožine môžeme priradiť usporiadanú päticu z núl a jednotiek a to tak, že na i-tej pozícii je 1, ak prvok a_i do tejto podmnožiny patrí a 0, ak prvok a_i do tejto podmnožiny nepatrí. Potom počet všetkých podmnožín sa rovná počtu usporiadaných pätíc z dvoch prvkov.

Príklad

V košíku je banán, jablko a pomaranč. Päť dievčat má chuť na ovocie. Koľkými spôsobmi môžeme dať trom dievčatám po 1 kuse ovocia a dvom nedať žiadne?

Záleží na tom, ktoré ovocie bude ktorému dievčaťu „priradené“, teda záleží na poradí. Zoberieme banán a dáme ho jednému z 5 dievčat. Môžeme ho vybrať 5 spôsobmi. Jablko dáme ho jednému zo 4 dievčat, čo môžeme urobiť 4 spôsobmi. Pomaranč dáme jednému z 3 dievčat. Máme teda $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ možností.
Pri použitím variácií vytvárame usporiadané trojice z piatich rôznych prvkov, teda $n = 5$, $k = 3$. Podľa (26) dostávame $V(5, 3) = \frac{5!}{(5-3)!} = 60.$

Príklad

Koľko podmnožín má 5-prvková množina?

Označme množinu ako $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$. Každej podmnožine môžeme priradiť usporiadanú päticu z núl a jednotiek a to tak, že na i-tej pozícii je 1, ak prvok a_i do tejto podmnožiny patrí a 0, ak prvok a_i do tejto podmnožiny nepatrí. Potom počet všetkých podmnožín sa rovná počtu usporiadaných pätíc z dvoch prvkov. Jedná sa teda o variácie s opakovaním, pričom $n = 2$, $k = 5$. Podľa (27) dostávame $V'(2, 5) = 2^5 = 32.$

Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru. Počet prvkov súboru označíme n a počet prvkov podmnožiny označíme k. Počet kombinácií z n prvkov k-tej triedy $(k \leq n)$ je

$$C(n,k) = \binom{n}{k}. \tag{28}$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n,n) = 1$.

Príklad

V dielni pracuje 15 mužov a 12 žien. Koľkými spôsobmi možno vybrať 7 zamestnancov dielne na rekreáciu, ak majú ísť 4 muži a 3 ženy?

Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru. Počet prvkov súboru označíme n a počet prvkov podmnožiny označíme k. Počet kombinácií z n prvkov k-tej triedy $(k \leq n)$ je

$$C(n,k) = \binom{n}{k}. \tag{28}$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n,n) = 1$.

Príklad

V dielni pracuje 15 mužov a 12 žien. Koľkými spôsobmi možno vybrať 7 zamestnancov dielne na rekreáciu, ak majú ísť 4 muži a 3 ženy?

Pri výbere mužov vyberáme 4 prvky z 15 prvkov, jedná sa o kombinácie bez opakovania. Počet možností je $C(15,4) = \binom{15}{4}$. Obdobne pri výbere žien máme $C(15,4) = \binom{12}{3}$ možností.

Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru. Počet prvkov súboru označíme n a počet prvkov podmnožiny označíme k. Počet kombinácií z n prvkov k-tej triedy $(k \leq n)$ je

$$C(n,k) = \binom{n}{k}. \tag{28}$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n,n) = 1$.

Príklad

V dielni pracuje 15 mužov a 12 žien. Koľkými spôsobmi možno vybrať 7 zamestnancov dielne na rekreáciu, ak majú ísť 4 muži a 3 ženy?

Pri výbere mužov vyberáme 4 prvky z 15 prvkov, jedná sa o kombinácie bez opakovania. Počet možností je $C(15,4) = \binom{15}{4}$. Obdobne pri výbere žien máme $C(15,4) = \binom{12}{3}$ možností. Z princípu násobenia vyplýva, že počet spôsobov výberu rekreantov je $\binom{15}{4} \cdot \binom{12}{3} = 300300$.

Kombinácie

Kombinácie sú podmnožiny danej veľkosti odobraté z daného vstupného súboru. Počet prvkov súboru označíme n a počet prvkov podmnožiny označíme k. Počet kombinácií z n prvkov k-tej triedy $(k \leq n)$ je

$$C(n,k) = \binom{n}{k}. \tag{28}$$

Ak $n = k$, dostávame $C(n,n) = 1$.

Príklad

V dielni pracuje 15 mužov a 12 žien. Koľkými spôsobmi možno vybrať 7 zamestnancov dielne na rekreáciu, ak majú ísť 4 muži a 3 ženy?

Pri výbere mužov vyberáme 4 prvky z 15 prvkov, jedná sa o kombinácie bez opakovania. Počet možností je $C(15,4) = \binom{15}{4}$. Obdobne pri výbere žien máme $C(15,4) = \binom{12}{3}$ možností. Z princípu násobenia vyplýva, že počet spôsobov výberu rekreantov je $\binom{15}{4} \cdot \binom{12}{3} = 300300$.

Pokus a jav

Nech je pevne stanovený istý systém podmienok, napr. majme pravidelnú hraciu kocku, ktorej steny sú označené číslami 1, 2, . . . , 6. Proces, ktorý môže nastať pri realizácii týchto podmienok, napr. hod touto hracou kockou, nazývame pokusom. Tu vyžadujeme, aby každý pokus mal tzv. vlastnosť hromadnosti, t. j. aby sme ho mohli za tých istých podmienok teoreticky ľubovoľnekrát opakovať.
Výsledok pokusu je jav. Pri hode kockou môže byť javom napr. padnutie šestky, padnutie nepárneho čísla, padnutie čísla väčšieho ako 4,. . .

Pokus a jav

Nech je pevne stanovený istý systém podmienok, napr. majme pravidelnú hraciu kocku, ktorej steny sú označené číslami 1, 2, ..., 6. Proces, ktorý môže nastať pri realizácii týchto podmienok, napr. hod touto hracou kockou, nazývame pokusom. Tu vyžadujeme, aby každý pokus mal tzv. vlastnosť hromadnosti, t. j. aby sme ho mohli za tých istých podmienok teoreticky ľubovoľnekrát opakovať.

Výsledok pokusu je jav. Pri hode kockou môže byť javom napr. padnutie šestky, padnutie nepárneho čísla, padnutie čísla väčšieho ako 4,...

Z pohľadu možného nastatia delíme javy do troch základných skupín:

1. javy isté sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu vždy nastanú (napr. padnutie čísla menšieho než 10);
2. javy nemožné sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu nikdy nenastanú (napr. padnutie čísla 10);
3. javy náhodné sú javy, ktoré po vykonaní daného pokusu môžu, ale nemusia nastať (napr. padnutie párneho čísla).

Javy budeme označovať veľkými písmenami $A, B, C, \dots$, istému javu vyhradíme písmeno I a nemožnému javu znak $\emptyset$.

Definícia

- Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B. Zapisujeme $A \subseteq B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)

Základné poznatky o javoch

Definícia

- Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B. Zapisujeme $A \subseteq B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)
- Javy A a B nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a súčasne $B \subseteq A$. Zapisujeme $A = B$.

Základné poznatky o javoch

Definícia

- Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B. Zapisujeme $A \subseteq B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)
- Javy A a B nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a súčasne $B \subseteq A$. Zapisujeme $A = B$.
- Opačným javom k javu A nazývame jav, ktorý nastane práve vtedy, keď nenastane jav A. Označujeme $\overline{A}$.

Základné poznatky o javoch

Definícia

- Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B. Zapisujeme $A \subseteq B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)
- Javy A a B nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a súčasne $B \subseteq A$. Zapisujeme $A = B$.
- Opačným javom k javu A nazývame jav, ktorý nastane práve vtedy, keď nenastane jav A. Označujeme $\overline{A}$.
- Jav C nazývame prienikom javov A a B práve vtedy, keď nastane len za súčasného nastatia oboch javov A a B. Zapisujeme $C = A \cap B$.

Základné poznatky o javoch

Definícia

- Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B. Zapisujeme $A \subseteq B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)
- Javy A a B nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a súčasne $B \subseteq A$. Zapisujeme $A = B$.
- Opačným javom k javu A nazývame jav, ktorý nastane práve vtedy, keď nenastane jav A. Označujeme $\overline{A}$.
- Jav C nazývame prienikom javov A a B práve vtedy, keď nastane len za súčasného nastatia oboch javov A a B. Zapisujeme $C = A \cap B$.
- Jav C nazývame zjednotením javov A a B práve vtedy, keď nastane len za predpokladu, že nastal aspoň jeden z javov A a B. Zapisujeme $C = A \cup B$.

Základné poznatky o javoch

Definícia

- Jav A nazývame podjavom javu B práve vtedy, keď z nastatia javu A vyplýva nastatie javu B. Zapisujeme $A \subseteq B$.
  (Napr. padnutie čísla 2 na hracej kocke je podjavom javu, že padne na nej párne číslo.)
- Javy A a B nazývame ekvivalentné práve vtedy, keď $A \subseteq B$ a súčasne $B \subseteq A$. Zapisujeme $A = B$.
- Opačným javom k javu A nazývame jav, ktorý nastane práve vtedy, keď nenastane jav A. Označujeme $\overline{A}$.
- Jav C nazývame prienikom javov A a B práve vtedy, keď nastane len za súčasného nastatia oboch javov A a B. Zapisujeme $C = A \cap B$.
- Jav C nazývame zjednotením javov A a B práve vtedy, keď nastane len za predpokladu, že nastal aspoň jeden z javov A a B. Zapisujeme $C = A \cup B$.

Vlastnosti javov a operácií s javmi

Nech A, B, C sú ľubovoľné javy. Platí:

1. $A \subseteq A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq I$;
2. ak $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$;
3. $\overline{I} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = I$,

Vlastnosti javov a operácií s javmi

Nech A, B, C sú ľubovoľné javy. Platí:

1. $A \subseteq A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq I$;
2. ak $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$;
3. $\overline{I} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = I$,
4. $\overline{A} \cap A = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap I = A$, $A \cap B \subseteq A$;
5. $\overline{A} \cup A = I$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup I = I$, $A \subseteq A \cup B$; $\overline{(\overline{A})} = A$;

Vlastnosti javov a operácií s javmi

Nech A, B, C sú ľubovoľné javy. Platí:

1. $A \subseteq A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq I$;
2. ak $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$;
3. $\overline{I} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = I$,
4. $\overline{A} \cap A = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap I = A$, $A \cap B \subseteq A$;
5. $\overline{A} \cup A = I$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup I = I$, $A \subseteq A \cup B$; $\overline{(\overline{A})} = A$;
6. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$;
7. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$;
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;

Vlastnosti javov a operácií s javmi

Nech A, B, C sú ľubovoľné javy. Platí:

1. $A \subseteq A, \quad \emptyset \subseteq A, \quad A \subseteq I$;
2. ak $A \subseteq B$ a $B \subseteq C$, tak $A \subseteq C$;
3. $\overline{I} = \emptyset$, $\overline{\emptyset} = I$,
4. $\overline{A} \cap A = \emptyset$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap I = A$, $A \cap B \subseteq A$;
5. $\overline{A} \cup A = I$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup I = I$, $A \subseteq A \cup B$; $\overline{(\overline{A})} = A$;
6. $A \cap A = A, \quad A \cup A = A$;
7. $A \cap B = B \cap A, \quad A \cup B = B \cup A$;
8. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C, \quad A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$;
9. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C), \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
10. $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B}, \quad \overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (de Morganove pravidlá).

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav A nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav B nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$.

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav A nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav B nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$. Odtiaľ dostávame

- jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{2, 4, 5, 6\}$;

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav A nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav B nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$. Odtiaľ dostávame

- jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{2, 4, 5, 6\}$;
- jav $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{4, 6\}$;

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav A nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav B nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$. Odtiaľ dostávame

- jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{2, 4, 5, 6\}$;
- jav $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{4, 6\}$;
- jav $\overline{B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3\}$;

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav A nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav B nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$. Odtiaľ dostávame

- jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{2, 4, 5, 6\}$;
- jav $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{4, 6\}$;
- jav $\overline{B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3\}$;
- jav $\overline{A \cap B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3, 5\}$;

Príklad

Nech jav A spočíva v tom, že pri jednom hode bežnou hracou kockou padne na vrchnej stene párne číslo a nech jav B znamená padnutie čísla, ktoré je väčšie ako 3. Charakterizujme javy:
$A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{B}$, $\overline{A \cap B}$.

Riešenie. Je zrejmé, že jav A nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{2, 4, 6\}$ a jav B nastane, keď padne niektoré číslo z množiny $\{4, 5, 6\}$. Odtiaľ dostávame

- jav $A \cup B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{2, 4, 5, 6\}$;
- jav $A \cap B$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{4, 6\}$;
- jav $\overline{B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3\}$;
- jav $\overline{A \cap B}$ nastane práve vtedy, keď padne číslo z množiny $\{1, 2, 3, 5\}$;

Definícia

Javy A a B nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) práve vtedy, keď nemôžu súčasne nastať, t. j. keď $A \cap B = \emptyset$. Javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) javmi práve vtedy, keď sú po dvojiciach disjunktné t. j. keď $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definícia

Javy A a B nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) práve vtedy, keď nemôžu súčasne nastať, t. j. keď $A \cap B = \emptyset$. Javy $H_1, H_2, \dots, H_n$ nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) javmi práve vtedy, keď sú po dvojiciach disjunktné t. j. keď $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$.

Definícia

Disjunktný systém javov $H_1, H_2, \dots, H_n$ nazývame úplným práve vtedy, keď jeho zjednotením je istý jav.

Definícia

Javy A a B nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) práve vtedy, keď nemôžu súčasne nastať, t. j. keď $A \cap B = \emptyset$. Javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nazývame disjunktnými (nezlúčiteľnými) javmi práve vtedy, keď sú po dvojiciach disjunktné t. j. keď $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Definícia

Disjunktný systém javov $H_1, H_2, \ldots, H_n$ nazývame úplným práve vtedy, keď jeho zjednotením je istý jav.

Definícia

Systém $H_1, H_2, \ldots, H_n$ je úplný disjunktný systém javov, ak platí

- $H_i \cap H_j = \emptyset$ pre každé $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$;
- $H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n = \bigcup_{i=1}^{n} H_i = I$.

Takýto systém javov často nazývame hypotézy.

Elementárne a zložené javy

Definícia

Jav A nazývame zloženým javom práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch javov A_1 a A_2, ktoré sa nerovnajú nemožnému javu a ani javu A.

Pre zložený jav A teda platí: $A = A_1 \cup A_2$, pričom $A \neq A_1 \neq \emptyset$ a $A \neq A_2 \neq \emptyset$.
Hovoríme, že jav A je rozložený na javy A_1 a A_2.
Príkladom zloženého javu je napr. padnutie nepárneho čísla na kocke.

Elementárne a zložené javy

Definícia

Jav A nazývame zloženým javom práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch javov A_1 a A_2, ktoré sa nerovnajú nemožnému javu a ani javu A.

Pre zložený jav A teda platí: $A = A_1 \cup A_2$, pričom $A \neq A_1 \neq \emptyset$ a $A \neq A_2 \neq \emptyset$.
Hovoríme, že jav A je rozložený na javy A_1 a A_2.
Príkladom zloženého javu je napr. padnutie nepárneho čísla na kocke.

Definícia

Každý jav E, ktorý nie je zložený nazývame elementárnym javom.

Elementárne a zložené javy

Definícia

Jav A nazývame zloženým javom práve vtedy, keď sa dá vyjadriť ako zjednotenie dvoch javov A_1 a A_2, ktoré sa nerovnajú nemožnému javu a ani javu A.

Pre zložený jav A teda platí: $A = A_1 \cup A_2$, pričom $A \neq A_1 \neq \emptyset$ a $A \neq A_2 \neq \emptyset$.
Hovoríme, že jav A je rozložený na javy A_1 a A_2.
Príkladom zloženého javu je napr. padnutie nepárneho čísla na kocke.

Definícia

Každý jav E, ktorý nie je zložený nazývame elementárnym javom.

Základné vlastnosti elementárnych javov:

1. Jav E je elementárny práve vtedy, keď neexistuje taký jav $A \neq \emptyset$, $A \neq E$ že $A \subseteq E$.
2. Ku každému zloženému javu A existuje taký elementárny jav E, že $E \subseteq A$.
3. Ľubovoľné dva rôzne elementárne javy sú disjunktné.
4. Každému zloženému javu A môžeme jednoznačne priradiť takú množinu elementárnych javov (táto množina nemusí byť konečná), že jav A je

Javové pole

Definícia

Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots\}$ *je ľubovoľná množina elementárnych javov. Pod* ***javovým poľom nad*** γ *rozumieme taký systém* τ *podmnožín množiny* γ*, pre ktorý platí:*

1. $\emptyset \in \tau$;
2. *ak* A, $B \in \tau$, *tak* $A \cap B \in \tau$, $A \cup B \in \tau$ *a* $\overline{A} \in \tau$;
3. *pre každú postupnosť* $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots \in \tau$ *je* $\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$ *a* $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \tau$.

Prvky javového poľa nazývame ***javmi****.*

Pojem pravdepodobnosti javu

Definícia (Klasická definícia pravdepodobnosti)

Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \ldots, E_n\}$ je konečná množina elementárnych javov a nech každý elementárny jav je **„rovnako možný (očakávaný)“**. Pre ľubovoľný jav $A \in \tau$ definujeme jeho pravdepodobnosť predpisom

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{29}$$

kde m je počet rôznych elementárnych javov, na ktoré sa jav A rozkladá, t. j.

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \cdots \cup E_{i_m}. \tag{30}$$

Pojem pravdepodobnosti javu

Definícia (Klasická definícia pravdepodobnosti)

Nech $\gamma = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ je konečná množina elementárnych javov a nech každý elementárny jav je **„rovnako možný (očakávaný)“**. Pre ľubovoľný jav $A \in \tau$ definujeme jeho pravdepodobnosť predpisom

$$P(A) = \frac{m}{n}, \tag{29}$$

kde m je počet rôznych elementárnych javov, na ktoré sa jav A rozkladá, t. j.

$$A = E_{i_1} \cup E_{i_2} \cup \cdots \cup E_{i_m}. \tag{30}$$

Rovnosť (29) môžeme interpretovať aj takto:

$$P(A) = \frac{\text{počet všetkých možných priaznivých výsledkov javu } A}{\text{počet všetkých možných výsledkov pokusu}}.$$

Základné vlastnosti pravdepodobnosti

Veta

1. *Pre každý jav* $A \in \tau$ *je* $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. *Pre istý a nemožný jav je* $P(I) = 1$ *a* $P(\emptyset) = 0$.
3. *ak* $A \subseteq B$, *tak* $P(A) \leq P(B)$.
4. *Pre opačný jav platí* $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.
5. *Pre disjunktné javy: ak* $A \cap B = \emptyset$, *tak* $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
6. *pre ľubovoľné javy* A, B *je* $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$;
7. *pre ľubovoľné javy* A, B, C *je*

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) -$$
$$-[P(A \cap B) + P(A \cap C) + P(B \cap C)] + P(A \cap B \cap C);$$

Príklad

Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri hode 2 kockami padne súčet
a) rovný 1,
b) rovný 4,
c) menší ako 13.

Príklad

Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri hode 2 kockami padne súčet
a) rovný 1,
b) rovný 4,
c) menší ako 13.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z usporiadaných dvojíc z prvkov $1, 2, \ldots, 6$, teda $n = 36$.

Príklad

Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri hode 2 kockami padne súčet
a) rovný 1,
b) rovný 4,
c) menší ako 13.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z usporiadaných dvojíc z prvkov $1, 2, \ldots, 6$, teda $n = 36$.

a) Nech A je jav „súčet je 1“. Súčet hodnôt na 2 kockách nemôže byť rovný 1, jav A je jav nemožný. Teda $P(A) = 0$.

Príklad

Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri hode 2 kockami padne súčet
a) rovný 1,
b) rovný 4,
c) menší ako 13.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z usporiadaných dvojíc z prvkov $1, 2, \ldots, 6$, teda $n = 36$.

a) Nech A je jav „súčet je 1“. Súčet hodnôt na 2 kockách nemôže byť rovný 1, jav A je jav nemožný. Teda $P(A) = 0$.

b) Nech B je jav „súčet je 4“. Máme $B = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, teda $m = 3$, $n = 36$. Potom $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

Príklad

Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že pri hode 2 kockami padne súčet
a) rovný 1,
b) rovný 4,
c) menší ako 13.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z usporiadaných dvojíc z prvkov $1, 2, \ldots, 6$, teda $n = 36$.

a) Nech A je jav „súčet je 1“. Súčet hodnôt na 2 kockách nemôže byť rovný 1, jav A je jav nemožný. Teda $P(A) = 0$.

b) Nech B je jav „súčet je 4“. Máme $B = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$, teda $m = 3$, $n = 36$. Potom $P(B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$.

c) Nech C je jav „súčet je menší ako 13“. Jav C pozostáva zo všetkých elementárnych javov, je to istý jav. Teda $P(C) = 1$.

Príklad

Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 3 hodoch mincou padne dvakrát hlava a raz znak.

Príklad

Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 3 hodoch mincou padne dvakrát hlava a raz znak.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z 8 javov:

$$\gamma = \{ZZZ, ZZH, ZHZ, ZHH, HZZ, HZH, HHZ, HHH\}$$

Jav „padnutie dvoch hláv a jedného znaku“ pozostáva z nasledujúcich elementárnych javov: $A = \{HHZ, HZH, ZHH\}$.

Príklad

Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 3 hodoch mincou padne dvakrát hlava a raz znak.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z 8 javov:

$$\gamma = \{ZZZ, ZZH, ZHZ, ZHH, HZZ, HZH, HHZ, HHH\}$$

Jav „padnutie dvoch hláv a jedného znaku“ pozostáva z nasledujúcich elementárnych javov: $A = \{HHZ, HZH, ZHH\}$.
Teda $m = 3$, $n = 8$. Pravdepodobnosť javu A je $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$.

Príklad

V študijnej skupine je 17 chlapcov a 13 dievčat. Na skúške 4 chlapci a 5 dievčat získalo ohodnotenie „A“. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný študent je dievča alebo študent, ktorý získal na skúške „A“?

Príklad

Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 3 hodoch mincou padne dvakrát hlava a raz znak.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z 8 javov:

$$\gamma = \{ZZZ, ZZH, ZHZ, ZHH, HZZ, HZH, HHZ, HHH\}$$

Jav „padnutie dvoch hláv a jedného znaku" pozostáva z nasledujúcich elementárnych javov: $A = \{HHZ, HZH, ZHH\}$.
Teda $m = 3$, $n = 8$. Pravdepodobnosť javu A je $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$.

Príklad

V študijnej skupine je 17 chlapcov a 13 dievčat. Na skúške 4 chlapci a 5 dievčat získalo ohodnotenie „A". Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný študent je dievča alebo študent, ktorý získal na skúške „A"?

Riešenie. Nech A je udalosť, že vybraný študent získal ohodnotenie „A" and B je udalosť, že vybraný študent je dievča. Chceme vypočítať $P(A \cup B)$.

Príklad

Aká je pravdepodobnosť toho, že pri 3 hodoch mincou padne dvakrát hlava a raz znak.

Riešenie. Množina elementárnych javov pozostáva z 8 javov:

$$\gamma = \{ZZZ, ZZH, ZHZ, ZHH, HZZ, HZH, HHZ, HHH\}$$

Jav „padnutie dvoch hláv a jedného znaku“ pozostáva z nasledujúcich elementárnych javov: $A = \{HHZ, HZH, ZHH\}$.
Teda $m = 3$, $n = 8$. Pravdepodobnosť javu A je $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3}{8}$.

Príklad

V študijnej skupine je 17 chlapcov a 13 dievčat. Na skúške 4 chlapci a 5 dievčat získalo ohodnotenie „A“. Aká je pravdepodobnosť toho, že náhodne vybraný študent je dievča alebo študent, ktorý získal na skúške „A“?

Riešenie. Nech A je udalosť, že vybraný študent získal ohodnotenie „A“ and B je udalosť, že vybraný študent je dievča. Chceme vypočítať $P(A \cup B)$. Dostávame

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{9}{30} + \frac{13}{30} - \frac{5}{30} = \frac{17}{30}.$$

Podmienená pravdepodobnosť a veta o úplnej pravdepodobnosti

Za istých okolností je užitočné skúmať pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že vieme o tom, že nastal jav B. Túto pravdepodobnosť budeme označovať $P(A|B)$ a čítať **pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B**.

Podmienená pravdepodobnosť a veta o úplnej pravdepodobnosti

Za istých okolností je užitočné skúmať pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že vieme o tom, že nastal jav B. Túto pravdepodobnosť budeme označovať $P(A|B)$ a čítať **pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B**.

Definícia (Podmienená pravdepodobnosť)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole.* **Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B** *definujeme takto:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{31}$$

Podmienená pravdepodobnosť a veta o úplnej pravdepodobnosti

Za istých okolností je užitočné skúmať pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že vieme o tom, že nastal jav B. Túto pravdepodobnosť budeme označovať $P(A|B)$ a čítať **pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B**.

Definícia (Podmienená pravdepodobnosť)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. **Pravdepodobnosť javu A za predpokladu, že nastal jav B** *definujeme takto:*

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}. \tag{31}$$

Veta

Ak $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, tak pre javy $A_i \in \tau$, $i = 1, 2, \ldots, n$ platí

$$P(\bigcap_{i=1}^{n} A_i) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Príklad

Pravdepodobnosť, že jablko v obchode je červené, je 0,7. Pravdepodobnosť, že jablko je červené a chutné, je 0,5. Aká je pravdepodobnosť, že jablko je chutné, ak je červené.

Príklad

Pravdepodobnosť, že jablko v obchode je červené, je 0,7. Pravdepodobnosť, že jablko je červené a chutné, je 0,5. Aká je pravdepodobnosť, že jablko je chutné, ak je červené.

Riešenie. Nechajte A je udalosť, že jablko je chutné a B je udalosť, že jablko je červené. Vieme, že $P(B) = 0,7$ a $P(A \cap B) = 0,5$. Dostávame

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0,5}{0,7} = \frac{5}{7} = 0,7143.$$

Príklad

Predpokladajme, že bolo zmiešaných päť dobrých poistiek a dve chybné poistky. Aby sme našli chybné poistky, testujeme ich jednu po druhej.
a) Aká je pravdepodobnosť, že prvá poistka bude dobrá a druhá chybná?
b) Aká je pravdepodobnosť, že prvé dve vybrané poistky budú dobré a ďalšie dve chybné?

Riešenie. a) Nechajte A je udalosť, že nájdeme dobrú poistku v prvom teste a B je udalosť, že nájdeme chybnú poistku v druhom teste. Vieme, že $P(A) = \frac{5}{7}$ a $P(B|A) = \frac{2}{6}$. Chceme vypočítať $P(A \cap B)$. Dostávame

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) = \frac{5}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{21} = 0,2381.$$

b) Označme A_i jav, že i-tá vybraná poistka je dobrá. Dostávane

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(\overline{A}_3|(A_1 \cap A_2)) \cdot P(\overline{A}_4|(A_1 \cap A_2 \cap \overline{A}_3)) =$$

$$\frac{5}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{40}{840} = \frac{1}{21} = 0,0476.$$

Veta (Veta o úplnej pravdepodobnosti)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole a javy* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav A platí*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Veta (Veta o úplnej pravdepodobnosti)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole a javy* $H_1, H_2, \dots, H_n$ *sú hypotézy (t. j. úplný systém disjunktných javov). Potom pre ľubovoľný jav* A *platí*

$$P(A) = P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) + \cdots + P(A|H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{i=1}^{n} P(A|H_i) \cdot P(H_i).$$

Dôkaz. Pre jav A máme:

$$A = A \cap I = A \cap (H_1 \cup H_2 \cup \cdots \cup H_n) = (A \cap H_1) \cup (A \cap H_2) \cup \cdots \cup (A \cap H_n).$$

Keďže javy H_i sú disjunktné a $(A \cap H_i) \subset H_i$, tak aj javy $(A \cap H_1)$, $(A \cap H_2)$, ..., $(A \cap H_n)$ sú disjunktné a podľa tretej axiómy definície pravdepodobnosti je

$$P(A) = P(A \cap H_1) + P(A \cap H_2) + \cdots + P(A \cap H_n) =$$

$$= P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) + \cdots + P(H_n) \cdot P(A|H_n)$$

Príklad

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% *kvalitných výrobkov, druhý* 80% *kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok je kvalitný.*

Príklad

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok je kvalitný.

Riešenie. Označme javy nasledovne:
H_1 – výrobok je vyrobený prvým automatom;
H_2 – výrobok je vyrobený druhým automatom;
A – výrobok je kvalitný.

Príklad

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok je kvalitný.

Riešenie. Označme javy nasledovne:
H_1 – výrobok je vyrobený prvým automatom;
H_2 – výrobok je vyrobený druhým automatom;
A – výrobok je kvalitný.
Počet výrobkov vyrobených automatmi je v pomere 3:1, teda 1. automat vyrobí $\frac{3}{4}$ z celkového počtu výrobkov a 2. automat $\frac{1}{4}$ z celkového počtu výrobkov. Odtiaľ $P(H_1) = \frac{3}{4} = 0,75$, $P(H_2) = \frac{1}{4} = 0,25$.

Príklad

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok je kvalitný.

Riešenie. Označme javy nasledovne:
H_1 – výrobok je vyrobený prvým automatom;
H_2 – výrobok je vyrobený druhým automatom;
A – výrobok je kvalitný.
Počet výrobkov vyrobených automatmi je v pomere 3:1, teda 1. automat vyrobí $\frac{3}{4}$ z celkového počtu výrobkov a 2. automat $\frac{1}{4}$ z celkového počtu výrobkov. Odtiaľ $P(H_1) = \frac{3}{4} = 0,75$, $P(H_2) = \frac{1}{4} = 0,25$.
Výrobok je kvalitný, ak ho vyrobil 1. automat s pravdepodobnosťou 0,7. Teda $P(A|H_1) = 0,7$. Podobne $P(A|H_2) = 0,8$. Podľa vety o úplnej pravdepodovnosti dostávame

Príklad

Dva automaty vyrábajú rovnaké výrobky, pričom produktivita prvého je trikrát vyššia ako produktivita druhého. Prvý automat vyrába 70% kvalitných výrobkov, druhý 80% kvalitných výrobkov. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že náhodne vybratý výrobok je kvalitný.

Riešenie. Označme javy nasledovne:
H_1 – výrobok je vyrobený prvým automatom;
H_2 – výrobok je vyrobený druhým automatom;
A – výrobok je kvalitný.
Počet výrobkov vyrobených automatmi je v pomere 3:1, teda 1. automat vyrobí $\frac{3}{4}$ z celkového počtu výrobkov a 2. automat $\frac{1}{4}$ z celkového počtu výrobkov. Odtiaľ $P(H_1) = \frac{3}{4} = 0,75$, $P(H_2) = \frac{1}{4} = 0,25$.
Výrobok je kvalitný, ak ho vyrobil 1. automat s pravdepodobnosťou 0,7. Teda $P(A|H_1) = 0,7$. Podobne $P(A|H_2) = 0,8$. Podľa vety o úplnej pravdepodovnosti dostávame

$$P(A) = P(H_1) \cdot P(A|H_1) + P(H_2) \cdot P(A|H_2) = 0,75 \cdot 0,7 + 0,25 \cdot 0,8 = 0,725.$$

Príklad

Z balíčka 52 žolíkových kariet niekto zobral dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná karta vytiahnutá z balíčka s 50 kartami je piková karta?

Príklad

Z balíčka 52 žolíkových kariet niekto zobral dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná karta vytiahnutá z balíčka s 50 kartami je piková karta?

Riešenie. Nech H_i je jav, že chýba i pikových kariet, $i = 0, 1, 2$. Nech A je jav, že náhodne vylosovaná karta je piková karta. Chceme vypočítať $P(A)$.

Príklad

Z balíčka 52 žolíkových kariet niekto zobral dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná karta vytiahnutá z balíčka s 50 kartami je piková karta?

Riešenie. Nech H_i je jav, že chýba i pikových kariet, $i = 0, 1, 2$. Nech A je jav, že náhodne vylosovaná karta je piková karta. Chceme vypočítať $P(A)$. Máme

$$P(H_0) = \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}}.$$

Príklad

Z balíčka 52 žolíkových kariet niekto zobral dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná karta vytiahnutá z balíčka s 50 kartami je piková karta?

Riešenie. Nech H_i je jav, že chýba i pikových kariet, $i = 0, 1, 2$. Nech A je jav, že náhodne vylosovaná karta je piková karta. Chceme vypočítať $P(A)$. Máme

$$P(H_0) = \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}}.$$

Podmienené pravdepodobnosti sú

$$P(A|H_0) = \frac{13}{50}, \qquad P(A|H_1) = \frac{12}{50}, \qquad P(A|H_2) = \frac{11}{50}.$$

Príklad

Z balíčka 52 žolíkových kariet niekto zobral dve karty. Aká je pravdepodobnosť, že náhodná karta vytiahnutá z balíčka s 50 kartami je piková karta?

Riešenie. Nech H_i je jav, že chýba i pikových kariet, $i = 0, 1, 2$. Nech A je jav, že náhodne vylosovaná karta je piková karta. Chceme vypočítať $P(A)$. Máme

$$P(H_0) = \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_1) = \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}}, \quad P(H_2) = \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}}.$$

Podmienené pravdepodobnosti sú

$$P(A|H_0) = \frac{13}{50}, \qquad P(A|H_1) = \frac{12}{50}, \qquad P(A|H_2) = \frac{11}{50}.$$

Podľa vety o úplnej pravdepodobnosti dostávame

$$P(A) = P(A|H_0) \cdot P(H_0) + P(A|H_1) \cdot P(H_1) + P(A|H_2) \cdot P(H_2) =$$

$$= \frac{13}{50} \cdot \frac{\binom{13}{0} \cdot \binom{39}{2}}{\binom{52}{2}} + \frac{12}{50} \cdot \frac{\binom{13}{1} \cdot \binom{39}{1}}{\binom{52}{2}} + \frac{11}{50} \cdot \frac{\binom{13}{2} \cdot \binom{39}{0}}{\binom{52}{2}} = \frac{1}{4}.$$

Bayesov vzorec

Veta

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole, javy* $H_1, H_2, \dots, H_n$ *sú hypotézy a* $A \in \tau$ *je ľubovoľný jav, pre ktorý je* $P(A) \neq 0$*. Potom pre každú hypotézu* H_k *je*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}. \tag{32}$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Bayesov vzorec

Veta

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole, javy* $H_1, H_2, \ldots, H_n$ *sú hypotézy a* $A \in \tau$ *je ľubovoľný jav, pre ktorý je* $P(A) \neq 0$*. Potom pre každú hypotézu* H_k *je*

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}. \tag{32}$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Príklad

Urna 1 obsahuje 5 bielych guľôčok a 7 čierne guľôčky. Urna 2 obsahuje 3 biele a 12 čiernych guľôčok. Hodíme mincou a ak padne hlava, vyberieme guľôčku z urny 1, a ak je to znak, vyberieme guľôčku z urny 2. Dozvedeli sme sa, že bola vybraná biela guľôčka. Aká je pravdepodobnosť, že to bola guľôčka vybratá z urny 2?

Bayesov vzorec

Veta

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}. \tag{32}$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Príklad

Urna 1 obsahuje 5 bielych guľôčok a 7 čierne guľôčky. Urna 2 obsahuje 3 biele a 12 čiernych guľôčok. Hodíme mincou a ak padne hlava, vyberieme guľôčku z urny 1, a ak je to znak, vyberieme guľôčku z urny 2. Dozvedeli sme sa, že bola vybraná biela guľôčka. Aká je pravdepodobnosť, že to bola guľôčka vybratá z urny 2?

Riešenie. Nech H_1 je jav, že padla hlava a H_2 je jav, že padol znak. Nech A je jav, že bola vybraná biela guľôčka. Zo zadania vyplýva, že $P(A|H_1) = \frac{5}{12}$ a $P(A|H_2) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Vieme, že $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Chceme vypočítať $P(H_2|A)$.

Bayesov vzorec

Veta

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole, javy $H_1, H_2, \ldots, H_n$ sú hypotézy a $A \in \tau$ je ľubovoľný jav, pre ktorý je $P(A) \neq 0$. Potom pre každú hypotézu H_k je

$$P(H_k|A) = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{\sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P(A|H_i)} = \frac{P(H_k) \cdot P(A|H_k)}{P(A)}. \tag{32}$$

Okrem toho platí $\sum_{i=1}^{n} P(H_i|A) = 1$.

Príklad

Urna 1 obsahuje 5 bielych guľôčok a 7 čierne guľôčky. Urna 2 obsahuje 3 biele a 12 čiernych guľôčok. Hodíme mincou a ak padne hlava, vyberieme guľôčku z urny 1, a ak je to znak, vyberieme guľôčku z urny 2. Dozvedeli sme sa, že bola vybraná biela guľôčka. Aká je pravdepodobnosť, že to bola guľôčka vybratá z urny 2?

Riešenie. Nech H_1 je jav, že padla hlava a H_2 je jav, že padol znak. Nech A je jav, že bola vybraná biela guľôčka. Zo zadania vyplýva, že $P(A|H_1) = \frac{5}{12}$ a $P(A|H_2) = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}$. Vieme, že $P(H_1) = P(H_2) = \frac{1}{2}$. Chceme vypočítať $P(H_2|A)$.

Z Bayesovho vzorca dostávame $P(H_2|A) = \frac{(1/5)\cdot(1/2)}{(1/5)\cdot(1/2)+(5/12)\cdot(1/2)} = \frac{12}{37}$.

Nezávislé javy

Definícia

Dva javy A a B nazývame **(vzájomne) nezávislými** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť jedného z nich sa nemení, ak nastane druhý jav alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová, t. j. nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:*

$$P(A|B) = P(A) \quad \vee \quad P(B) = 0 \quad \vee \quad P(B|A) = P(B) \quad \vee \quad P(A) = 0. \tag{33}$$

Nezávislé javy

Definícia

Dva javy A a B nazývame **(vzájomne) nezávislými** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť jedného z nich sa nemení, ak nastane druhý jav alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová, t. j. nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:*

$$P(A|B) = P(A) \quad \vee \quad P(B) = 0 \quad \vee \quad P(B|A) = P(B) \quad \vee \quad P(A) = 0. \tag{33}$$

Veta

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Javy $A, B \in \tau$ sú nezávislé práve vtedy, keď

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{34}$$

Nezávislé javy

Definícia

Dva javy A a B nazývame **(vzájomne) nezávislými** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť jedného z nich sa nemení, ak nastane druhý jav alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová, t. j. nastane aspoň jeden z týchto štyroch prípadov:*

$$P(A|B) = P(A) \quad \vee \quad P(B) = 0 \quad \vee \quad P(B|A) = P(B) \quad \vee \quad P(A) = 0. \tag{33}$$

Veta

Nech $[\gamma, \tau, P]$ je pravdepodobnostné pole. Javy $A, B \in \tau$ sú nezávislé práve vtedy, keď

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{34}$$

Z nezávislosti javov A a B vyplýva aj nezávislosť týchto dvojíc javov:

$$\overline{A} \text{ a } B, \qquad A \text{ a } \overline{B}, \qquad \overline{A} \text{ a } \overline{B}. \tag{35}$$

Celkove nezávislé javy

Definícia

Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, *nazývame* **celkove nezávislým** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť, že nastane ľubovoľný z nich sa nemení, ak nastanú ľubovoľné z ostatných javov alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová.*

Celkove nezávislé javy

Definícia

Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, *nazývame* **celkove nezávislým** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť, že nastane ľubovoľný z nich sa nemení, ak nastanú ľubovoľné z ostatných javov alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová.*

Veta (Pravdepodobnosť prieniku celkove nezávislých javov)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov* A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $n \geq 2$, *je celkove nezávislým, tak pre každé* $k \leq n$ *platí*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{36}$$

Celkove nezávislé javy

Definícia

Systém javov $A_1, A_2, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, *nazývame* **celkove nezávislým** *práve vtedy, keď pravdepodobnosť, že nastane ľubovoľný z nich sa nemení, ak nastanú ľubovoľné z ostatných javov alebo keď pravdepodobnosť jedného z nich je nulová.*

Veta (Pravdepodobnosť prieniku celkove nezávislých javov)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov* A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $n \geq 2$, *je celkove nezávislým, tak pre každé* $k \leq n$ *platí*

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot \ldots \cdot P(A_n). \tag{36}$$

Veta (Pravdepodobnosť zjednotenia celkove nezávislých javov)

Nech $[\gamma, \tau, P]$ *je pravdepodobnostné pole. Ak systém javov* A_1, A_2, $\ldots$, A_n, $n \geq 2$, *je celkove nezávislým, tak*

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot \cdots \cdot P(\overline{A}_n). \tag{37}$$

Príklad

Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že

a) *všetci štyria trafia do koša,*

b) *ani jeden netrafí do koša,*

c) *aspoň jeden trafí do koša,*

d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

Príklad

Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že

a) *všetci štyria trafia do koša,*

b) *ani jeden netrafí do koša,*

c) *aspoň jeden trafí do koša,*

d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

Riešenie. Označme A_i jav, že i-tý basketbalista trafí do koša. Máme

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,7, \quad P(A_3) = 0,85, \quad P(A_4) = 0,9.$$

Príklad

Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že

a) *všetci štyria trafia do koša,*
b) *ani jeden netrafí do koša,*
c) *aspoň jeden trafí do koša,*
d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

Riešenie. Označme A_i jav, že i-tý basketbalista trafí do koša. Máme

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,7, \quad P(A_3) = 0,85, \quad P(A_4) = 0,9.$$

Teda

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,9 = 0,4284$

Príklad

Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že

a) *všetci štyria trafia do koša,*

b) *ani jeden netrafí do koša,*

c) *aspoň jeden trafí do koša,*

d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

Riešenie. Označme A_i jav, že i-tý basketbalista trafí do koša. Máme

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,7, \quad P(A_3) = 0,85, \quad P(A_4) = 0,9.$$

Teda

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,9 = 0,4284$

b) $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,1 = 0,0009$

Príklad

Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že

a) *všetci štyria trafia do koša,*
b) *ani jeden netrafí do koša,*
c) *aspoň jeden trafí do koša,*
d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

Riešenie. Označme A_i jav, že i-tý basketbalista trafí do koša. Máme

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,7, \quad P(A_3) = 0,85, \quad P(A_4) = 0,9.$$

Teda

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,9 = 0,4284$
b) $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,1 = 0,0009$
c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,9991$

Príklad

Štyria basketbalisti hádžu na kôš. Pravdepodobnosti úspešného zásahu u jednotlivých basketbalistov sú 0,8; 0,7; 0,85 a 0,9. Vypočítajte pravdepodobnosť, že

a) *všetci štyria trafia do koša,*

b) *ani jeden netrafí do koša,*

c) *aspoň jeden trafí do koša,*

d) *aspoň jeden netrafí do koša.*

Riešenie. Označme A_i jav, že i-tý basketbalista trafí do koša. Máme

$$P(A_1) = 0,8, \quad P(A_2) = 0,7, \quad P(A_3) = 0,85, \quad P(A_4) = 0,9.$$

Teda

a) $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,8 \cdot 0,7 \cdot 0,85 \cdot 0,9 = 0,4284$

b) $P(\overline{A}_1 \cap \overline{A}_2 \cap \overline{A}_3 \cap \overline{A}_4) = P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,2 \cdot 0,3 \cdot 0,15 \cdot 0,1 = 0,0009$

c) $P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdot P(\overline{A}_2) \cdot P(\overline{A}_3) \cdot P(\overline{A}_4) = 0,9991$

d) $P(\overline{A}_1 \cup \overline{A}_2 \cup \overline{A}_3 \cup \overline{A}_4) = 1 - P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3) \cdot P(A_4) = 0,5716$

Opakované nezávislé pokusy

Nech výsledkom nejakého pokusu je jav A. Opakujme za tých istých podmienok pokus n-krát, pričom predpokladáme, že tieto pokusy sú nezávislé, t. j. sú také, že výsledok každého z nich nemá vplyv na výsledok žiadneho predchádzajúceho pokusu a ani na výsledok žiadneho nasledujúceho pokusu. Inak povedané, pravdepodobnosť, že nastane jav A, je v každom pokuse rovnaká.

Opakované nezávislé pokusy

Nech výsledkom nejakého pokusu je jav A. Opakujme za tých istých podmienok pokus n-krát, pričom predpokladáme, že tieto pokusy sú nezávislé, t. j. sú také, že výsledok každého z nich nemá vplyv na výsledok žiadneho predchádzajúceho pokusu a ani na výsledok žiadneho nasledujúceho pokusu. Inak povedané, pravdepodobnosť, že nastane jav A, je v každom pokuse rovnaká.

Veta (Bernoulliho veta)

Nech p je pravdepodobnosť toho, že pri danom pokuse nastane jav A a $P_{n,p}(k)$ je pravdepodobnosť toho, že pri n-násobnom nezávislom opakovaní daného pokusu nastane jav A práve k-krát. Potom platí tzv. **Bernoulliho vzorec***:*

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \qquad \text{pre } k \in \{0, 1, 2, \dots, n\}. \tag{38}$$

Príklad

Predpokladajme, že hodíme dve kocky 8 krát. Aká je pravdepodobnosť, že najviac trikrát hodíme súčet 7?

Príklad

Predpokladajme, že hodíme dve kocky 8 krát. Aká je pravdepodobnosť, že najviac trikrát hodíme súčet 7?

Riešenie. Súčet 7 môžeme hodiť 6 spôsobmi:

$$(1,6),\ (2,5), (3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1).$$

Je 36 možností padnutia dvojice čísel na kockách, teda $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Príklad

Predpokladajme, že hodíme dve kocky 8 krát. Aká je pravdepodobnosť, že najviac trikrát hodíme súčet 7?

Riešenie. Súčet 7 môžeme hodiť 6 spôsobmi:

$$(1,6),\ (2,5),(3,4),\ (4,3),\ (5,2),\ (6,1).$$

Je 36 možností padnutia dvojice čísel na kockách, teda $p = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.
Máme $n = 8,\ k = 0,1,2,3$ a podľa Bernoulliho vzorca dostávame

$$P(A) = P_8(0)+P_8(1)+P_8(2)+P_8(3) = \binom{8}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^8+\binom{8}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^7+$$

$$+\binom{8}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^6+\binom{8}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^5 = 0,96934.$$

Pojem náhodnej premennej

Pod **náhodnou premennou** budeme rozumieť takú premennú, ktorá svoje hodnoty nadobúda náhodne.
Príklady náhodnej premennej:

1. Súčet bodov hodených napr. na troch bežných hracích kockách (možné hodnoty: $3, 4, \ldots, 18$);
2. počet bodov, ktoré študent získa z písomky,
3. počet úspešných hodov do basketbalového koša,
4. počet výtlkov na ceste z Košíc do Prešova,
5. doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
6. výška dospelého muža,
7. polčas rozpadu rádioaktívnej látky (nadobúda hodnoty z určitého intervalu).

Pojem náhodnej premennej

Pod **náhodnou premennou** budeme rozumieť takú premennú, ktorá svoje hodnoty nadobúda náhodne.

Príklady náhodnej premennej:

1. Súčet bodov hodených napr. na troch bežných hracích kockách (možné hodnoty: $3, 4, \dots, 18$);
2. počet bodov, ktoré študent získa z písomky,
3. počet úspešných hodov do basketbalového koša,
4. počet výtlkov na ceste z Košíc do Prešova,
5. doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
6. výška dospelého muža,
7. polčas rozpadu rádioaktívnej látky (nadobúda hodnoty z určitého intervalu).

Náhodné premenné delíme na

- **diskrétne**,
- **spojité**.

Definícia náhodnej premennej

Definícia

Pod **náhodnou premennou** rozumieme každé zobrazenie $X : \gamma \to \mathbb{R}$, kde γ je množina elementárnych javov a $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Pre každý elementárny jav E je zrejme $X(E)$ nejaké reálne číslo, ktoré nazývame **hodnotou náhodnej premennej pre elementárny jav E** alebo skrátene **hodnotou náhodnej premennej**.

Definícia náhodnej premennej

Definícia

Pod **náhodnou premennou** rozumieme každé zobrazenie $X : \gamma \to \mathbb{R}$, kde γ je množina elementárnych javov a $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Pre každý elementárny jav E je zrejme $X(E)$ nejaké reálne číslo, ktoré nazývame **hodnotou náhodnej premennej pre elementárny jav E** alebo skrátene **hodnotou náhodnej premennej**.

Náhodná premenná priradí každému elementárnemu javu nejaké reálne číslo.
Každému javu A priradí číselnú množinu tvorenú číslami, ktoré sú priradené elemen. javom, na ktoré sa jav A rozkladá.
Náhodné premenné – X, Y, X_1, X_2, ...
Hodnoty náhodných premenných – x, y, x_1, x_2, ...

Definícia náhodnej premennej

Definícia

Pod **náhodnou premennou** rozumieme každé zobrazenie $X : \gamma \to \mathbb{R}$, kde γ je množina elementárnych javov a $\mathbb{R}$ je množina reálnych čísel. Pre každý elementárny jav E je zrejme $X(E)$ nejaké reálne číslo, ktoré nazývame **hodnotou náhodnej premennej pre elementárny jav E** alebo skrátene **hodnotou náhodnej premennej**.

Náhodná premenná priradí každému elementárnemu javu nejaké reálne číslo.
Každému javu A priradí číselnú množinu tvorenú číslami, ktoré sú priradené elemen. javom, na ktoré sa jav A rozkladá.
Náhodné premenné – X, Y, X_1, X_2, ...
Hodnoty náhodných premenných – x, y, x_1, x_2, ...
Budeme predpokladať, že pre každé $a \in \mathbb{R}$ vieme určiť pravdepodobnosti typu:

1. $P(X = a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnota náhodnej premennej X je rovná číslu a;
2. $P(X \leq a)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že hodnoty náhodnej premennej X nebudú väčšie než číslo a;
3. $P(X \in I)$, t. j. pravdepodobnosť toho, že náhodná premenná X nadobúda hodnoty z intervalu I.

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{39}$$

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{39}$$

Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{39}$$

Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{39}$$

Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;
3. F *je neklesajúca funkcia, t. j. pre každé* $a < b$ *je* $F(a) \leq F(b)$;

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{39}$$

Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim_{x \to \infty} F(x) = 1$;
3. F *je neklesajúca funkcia, t. j. pre každé* $a < b$ *je* $F(a) \leq F(b)$;
4. F *je sprava spojitá pre diskrétnu náhodnú premennú a spojitá pre spojitú náhodnú premennú na celej množine reálnych čísel;*

Distribučná funkcia náhodnej premennej

Definícia

Distribučná funkcia F **náhodnej premennej** X je funkcia, ktorá je pre každé $x \in \mathbb{R}$ určená predpisom

$$F(x) = P(X \leq x). \tag{39}$$

Veta (Vlastnosti distribučnej funkcie)

1. *Pre každé* $x \in \mathbb{R}$ *je* $0 \leq F(x) \leq 1$;
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0$ *a* $\lim\limits_{x \to \infty} F(x) = 1$;
3. F *je neklesajúca funkcia, t. j. pre každé* $a < b$ *je* $F(a) \leq F(b)$;
4. F *je sprava spojitá pre diskrétnu náhodnú premennú a spojitá pre spojitú náhodnú premennú na celej množine reálnych čísel;*
5. *ak* $a < b$, *tak*

$$P(X \in (a,\, b\rangle) = P(a < X \leq b) = F(b) - F(a). \tag{40}$$

Diskrétna náhodná premenná

Definícia (Rozdelenie diskrétneho typu)

Náhodná premenná X má **rozdelenie diskrétneho typu**, ak existuje konečná alebo spočítateľná množina reálnych čísel $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$ taká, že pre každé $x_i \in \mathcal{H}(X)$ je daná pravdepodobnosť $P(X = x_i) = p_i$ a platí $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$. Množinu $\mathcal{H}(X)$ nazývame **obor hodnôt** náhodnej premennej X.

Diskrétna náhodná premenná

Definícia (Rozdelenie diskrétneho typu)

Náhodná premenná X má **rozdelenie diskrétneho typu**, ak existuje konečná alebo spočítateľná množina reálnych čísel $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ taká, že pre každé $x_i \in \mathcal{H}(X)$ je daná pravdepodobnosť $P(X = x_i) = p_i$ a platí $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$. Množinu $\mathcal{H}(X)$ nazývame **obor hodnôt** náhodnej premennej X.

Náhodnú premennú X môžeme popísať tabuľkou:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline P(X = x_i) = p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}, \tag{41}$$

ktorú nazývame **pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej X**.

Diskrétna náhodná premenná

Definícia (Rozdelenie diskrétneho typu)

Náhodná premenná X má **rozdelenie diskrétneho typu**, ak existuje konečná alebo spočítateľná množina reálnych čísel $\mathcal{H}(X) = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ taká, že pre každé $x_i \in \mathcal{H}(X)$ je daná pravdepodobnosť $P(X = x_i) = p_i$ a platí $\sum_{i=1}^{n(\infty)} p_i = 1$. Množinu $\mathcal{H}(X)$ nazývame **obor hodnôt** náhodnej premennej X.

Náhodnú premennú X môžeme popísať tabuľkou:

$$\begin{array}{c||c|c|c|c} x_i & x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ \hline P(X = x_i) = p_i & p_1 & p_2 & \cdots & p_n \end{array}, \tag{41}$$

ktorú nazývame **pravdepodobnostná tabuľka náhodnej premennej X**.
Iný spôsob zadania je **pravdepodobnostnou funkciou**

$$f(x) = \begin{cases} P(X = x), & \text{ak } x = x_i \in \mathbb{R}; \\ 0, & \text{inak.} \end{cases} \tag{42}$$

Modus a stredná hodnota náhodnej premennej

Definícia

Modus diskrétnej náhodnej premennej X je najpravdepodobnejšia hodnota tejto náhodnej premennej. Označujeme $\mathcal{M}o(X)$.

$\mathcal{M}o(X)$ sa môže rovnať viac-prvkovej množine. V krajnom prípade $\mathcal{M}o(X) = \mathcal{H}(X)$.

Modus a stredná hodnota náhodnej premennej

Definícia

Modus diskrétnej náhodnej premennej X je najpravdepodobnejšia hodnota tejto náhodnej premennej. Označujeme $\mathcal{M}o(X)$.

$\mathcal{M}o(X)$ sa môže rovnať viac-prvkovej množine. V krajnom prípade $\mathcal{M}o(X) = \mathcal{H}(X)$.

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Pod **strednou hodnotou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $E(X)$, ktoré je definované pre diskrétnu náhodnú premennú vzťahom

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} x_i \cdot p_i.$$

Disperzia

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X, ktorej stredná hodnota je $E(X)$. Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej** X rozumieme číslo $D(X)$ (ak existuje), ktoré je definované takto

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{43}$$

Disperzia

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X, ktorej stredná hodnota je $E(X)$. Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej X** rozumieme číslo $D(X)$ (ak existuje), ktoré je definované takto

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n(\infty)} (x_i - E(X))^2 p_i.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej X** rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{43}$$

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $A = a$ je konštantná náhodná premenná, tak $E(A) = a$ a $D(A) = 0$;*

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $A = a$ je konštantná náhodná premenná, tak $E(A) = a$ a $D(A) = 0$;*
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $A = a$ je konštantná náhodná premenná, tak* $E(A) = a$ *a* $D(A) = 0$;
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $A = a$ je konštantná náhodná premenná, tak* $E(A) = a$ *a* $D(A) = 0$;
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $A = a$ je konštantná náhodná premenná, tak* $E(A) = a$ *a* $D(A) = 0$;
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;
5. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $A = a$ je konštantná náhodná premenná, tak* $E(A) = a$ *a* $D(A) = 0$;
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;
5. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Vlastnosti strednej hodnoty a disperzie

Veta

Nech X je náhodná premenná a nech a a b sú ľubovoľné konštanty. Potom

1. *ak $A = a$ je konštantná náhodná premenná, tak $E(A) = a$ a $D(A) = 0$;*
2. $E(a \cdot X + b \cdot Y) = a \cdot E(X) + b \cdot E(Y)$;
3. $E(X - E(X)) = 0$;
4. $D(a \cdot X) = a^2 \cdot D(X)$;
5. $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.

Príklad

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X so strednou hodnotou 3,7 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	1	2	3	4	x_5
p_i	0,1	p_2	0,3	0,35	0,2

. Určte:

a) *neznáme hodnoty x_5 a p_2;*

b) *disperziu a modus náhodnej premennej X;*

c) $P(X \geq 5)$ *a* $P(E(X) < X \leq 7)$*;*

Riešenie.

a) Hodnotu p_2 určíme zo vzťahu $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.
Teda: $0,1 + p_1 + 0,3 + 0,35 + 0,2 = 1$, odtiaľ $p_2 = 0,05$.
Pre určenie hodnoty x_5 dosadíme do vzorca pre strednú hodnotu, ktorá je daná. Dostávame

$$1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,35 + 0,2 \cdot x_5 = 3,7 \implies x_5 = 6.$$

Príklad

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X so strednou hodnotou 3,7 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	1	2	3	4	x_5
p_i	0,1	p_2	0,3	0,35	0,2

. Určte:

a) *neznáme hodnoty x_5 a p_2;*

b) *disperziu a modus náhodnej premennej X;*

c) $P(X \geq 5)$ *a* $P(E(X) < X \leq 7)$*;*

Riešenie.

a) Hodnotu p_2 určíme zo vzťahu $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.
Teda: $0,1 + p_1 + 0,3 + 0,35 + 0,2 = 1$, odtiaľ $p_2 = 0,05$.
Pre určenie hodnoty x_5 dosadíme do vzorca pre strednú hodnotu, ktorá je daná. Dostávame

$$1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,35 + 0,2 \cdot x_5 = 3,7 \implies x_5 = 6.$$

b) $D(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - 3,7)^2 \cdot 0,1 + (2 - 3,7)^2 \cdot 0,05$
$+(3 - 3,7)^2 \cdot 0,3 + (4 - 3,7)^2 \cdot 0,35 + (6 - 3,7)^2 \cdot 0,2 = 2,11.$

Príklad

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X so strednou hodnotou 3,7 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou

x_i	1	2	3	4	x_5
p_i	0,1	p_2	0,3	0,35	0,2

. Určte:

a) *neznáme hodnoty x_5 a p_2;*

b) *disperziu a modus náhodnej premennej X;*

c) $P(X \geq 5)$ *a* $P(E(X) < X \leq 7)$*;*

Riešenie.

a) Hodnotu p_2 určíme zo vzťahu $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.
Teda: $0,1 + p_1 + 0,3 + 0,35 + 0,2 = 1$, odtiaľ $p_2 = 0,05$.
Pre určenie hodnoty x_5 dosadíme do vzorca pre strednú hodnotu, ktorá je daná. Dostávame

$$1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,35 + 0,2 \cdot x_5 = 3,7 \implies x_5 = 6.$$

b) $D(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - 3,7)^2 \cdot 0,1 + (2 - 3,7)^2 \cdot 0,05$
$+ (3 - 3,7)^2 \cdot 0,3 + (4 - 3,7)^2 \cdot 0,35 + (6 - 3,7)^2 \cdot 0,2 = 2,11.$
Modus je najpravdepodobnejšia hodnota, teda $\mathcal{M}o(X) = 4$.

Príklad

Rozdelenie pravdepodobnosti náhodnej premennej X so strednou hodnotou 3,7 je dané pravdepodobnostnou tabuľkou $\begin{array}{c||c|c|c|c|c} x_i & 1 & 2 & 3 & 4 & x_5 \\ \hline p_i & 0{,}1 & p_2 & 0{,}3 & 0{,}35 & 0{,}2 \end{array}$. *Určte:*

a) *neznáme hodnoty x_5 a p_2;*

b) *disperziu a modus náhodnej premennej X;*

c) $P(X \geq 5)$ *a* $P(E(X) < X \leq 7)$*;*

Riešenie.

a) Hodnotu p_2 určíme zo vzťahu $\sum_{i=1}^{5} p_i = 1$.
Teda: $0,1 + p_1 + 0,3 + 0,35 + 0,2 = 1$, odtiaľ $p_2 = 0,05$.
Pre určenie hodnoty x_5 dosadíme do vzorca pre strednú hodnotu, ktorá je daná. Dostávame

$$1 \cdot 0,1 + 2 \cdot 0,05 + 3 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,35 + 0,2 \cdot x_5 = 3,7 \implies x_5 = 6.$$

b) $D(X) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - 3,7)^2 \cdot 0,1 + (2 - 3,7)^2 \cdot 0,05$
$+(3 - 3,7)^2 \cdot 0,3 + (4 - 3,7)^2 \cdot 0,35 + (6 - 3,7)^2 \cdot 0,2 = 2,11.$
Modus je najpravdepodobnejšia hodnota, teda $\mathcal{M}o(X) = 4$.
c) $P(X \geq 5) = P(X = 6) = 0,2$;
$P(E(X) < X \leq 7) = P(3,7 < X \leq 7) = P(X = 4) + P(X = 6) = 0,55$

Príklad

Hádžeme dvoma kockami. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu maxima z hodených hodnôt. Určte:

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *distribučnú funkciu $F(x)$;*

c) $P(X < 4),\ P(X \geq 3),\ P(2 < X \leq 5)$,

d) *strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.*

Príklad

Hádžeme dvoma kockami. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu maxima z hodených hodnôt. Určte:

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *distribučnú funkciu $F(x)$;*

c) $P(X < 4)$, $P(X \geq 3)$, $P(2 < X \leq 5)$,

d) *strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.*

Riešenie. a) Maximum hodených hodnôt môže byť 1,2,3,4,5 alebo 6. Teda $\mathcal{H}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pre každú hodnotu z množiny $\mathcal{H}(X)$ vypočítame pravdepodobnosť, s ktorou je daná hodnota dosiahnutá.
Pre výpočet $P(X = 1)$ si treba uvedomiť, že maximum sa rovná 1 len v prípade, že na obidvoch kockách hodíme číslo 1, teda $m = 1$, $n = 36$. Odtiaľ $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.
$P(X = 2) = \frac{3}{36}$, lebo maximum je rovné 2 pre dvojice (1,2), (2,1), (2,2).

Príklad

Hádžeme dvoma kockami. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu maxima z hodených hodnôt. Určte:

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *distribučnú funkciu $F(x)$;*

c) $P(X < 4)$, $P(X \geq 3)$, $P(2 < X \leq 5)$,

d) *strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.*

Riešenie. a) Maximum hodených hodnôt môže byť 1,2,3,4,5 alebo 6. Teda $\mathcal{H}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pre každú hodnotu z množiny $\mathcal{H}(X)$ vypočítame pravdepodobnosť, s ktorou je daná hodnota dosiahnutá.
Pre výpočet $P(X = 1)$ si treba uvedomiť, že maximum sa rovná 1 len v prípade, že na obidvoch kockách hodíme číslo 1, teda $m = 1$, $n = 36$. Odtiaľ $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.
$P(X = 2) = \frac{3}{36}$, lebo maximum je rovné 2 pre dvojice (1,2), (2,1), (2,2).
Rovnakým spôsobom vypočítame zvyšné pravdepodobnosti. Výsledok zapíšeme do tabuľky

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

Príklad

Hádžeme dvoma kockami. Nech X je náhodná premenná, ktorá nadobúda hodnotu maxima z hodených hodnôt. Určte:

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *distribučnú funkciu $F(x)$;*

c) $P(X < 4), \; P(X \geq 3), \; P(2 < X \leq 5)$,

d) *strednú hodnotu $E(X)$ a disperziu $D(X)$.*

Riešenie. a) Maximum hodených hodnôt môže byť 1,2,3,4,5 alebo 6. Teda $\mathcal{H}(X) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pre každú hodnotu z množiny $\mathcal{H}(X)$ vypočítame pravdepodobnosť, s ktorou je daná hodnota dosiahnutá.
Pre výpočet $P(X = 1)$ si treba uvedomiť, že maximum sa rovná 1 len v prípade, že na obidvoch kockách hodíme číslo 1, teda $m = 1$, $n = 36$. Odtiaľ $P(X = 1) = \frac{1}{36}$.
$P(X = 2) = \frac{3}{36}$, lebo maximum je rovné 2 pre dvojice (1,2), (2,1), (2,2).
Rovnakým spôsobom vypočítame zvyšné pravdepodobnosti. Výsledok zapíšeme do tabuľky

x_i	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{1}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{11}{36}$

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;

c) $P(X<4)=P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$;
$P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)+P(X=6)=\frac{32}{36}=\frac{8}{9}$;
$P(2<X\leq 5)=P(X=3)+P(X=4)+P(X=5)=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$;
alebo inak podľa (40):
$P(2<X\leq 5)=F(5)-F(2)=\frac{25}{36}-\frac{4}{36}=\frac{21}{36}=\frac{7}{12}$.

d) $E(X)=\sum_{i=1}^{6} x_i\cdot p_i=1\cdot\frac{1}{36}+2\cdot\frac{3}{36}+3\cdot\frac{5}{36}+4\cdot\frac{7}{36}+5\cdot\frac{9}{36}+6\cdot\frac{11}{36}=\frac{161}{36}$;

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;
$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$;
alebo inak podľa (40):
$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{25}{36} - \frac{4}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$;

$D(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{1}{36} + (2 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{3}{36} + (3 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{5}{36} +$
$(4 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{7}{36} + (5 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{9}{36} + (6 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{2555}{1296}$.

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;
$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$;
alebo inak podľa (40):
$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{25}{36} - \frac{4}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$;

$D(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{1}{36} + (2 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{3}{36} + (3 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{5}{36} +$
$(4 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{7}{36} + (5 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{9}{36} + (6 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{2555}{1296}$.

Inak môžeme $D(X)$ vypočítať podľa vzťahu $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
Vypočítame
$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 16 \cdot \frac{7}{36} + 25 \cdot \frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$ a dosadíme

c) $P(X < 4) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$;
$P(X \geq 3) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$;
$P(2 < X \leq 5) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$;
alebo inak podľa (40):
$P(2 < X \leq 5) = F(5) - F(2) = \frac{25}{36} - \frac{4}{36} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$.

d) $E(X) = \sum_{i=1}^{6} x_i \cdot p_i = 1 \cdot \frac{1}{36} + 2 \cdot \frac{3}{36} + 3 \cdot \frac{5}{36} + 4 \cdot \frac{7}{36} + 5 \cdot \frac{9}{36} + 6 \cdot \frac{11}{36} = \frac{161}{36}$;

$D(X) = \sum_{i=1}^{6} (x_i - E(X))^2 p_i = (1 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{1}{36} + (2 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{3}{36} + (3 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{5}{36} + (4 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{7}{36} + (5 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{9}{36} + (6 - \frac{161}{36})^2 \cdot \frac{11}{36} = \frac{2555}{1296}$.

Inak môžeme $D(X)$ vypočítať podľa vzťahu $D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$.
Vypočítame
$E(X^2) = 1 \cdot \frac{1}{36} + 4 \cdot \frac{3}{36} + 9 \cdot \frac{5}{36} + 16 \cdot \frac{7}{36} + 25 \cdot \frac{9}{36} + 36 \cdot \frac{11}{36} = \frac{791}{36}$ a dosadíme
$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{791}{36} - (\frac{161}{36})^2 = \frac{2555}{1296}$

Rozdelenia pravdepodobnosti diskrétnych náhodných premenných

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti

Vstupy: Prirodzené číslo n a reálne číslo $p \in (0, 1)$.

Definícia

Náhodná premenná X má **binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n a p** *práve vtedy, keď*

1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$;

2.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}. \tag{44}$$

Používame pritom označenie $X \sim bino(n; p)$.

Binomické rozdelenie pravdepodobnosti

Vstupy: Prirodzené číslo n a reálne číslo $p \in (0, 1)$.

Definícia

Náhodná premenná X má **binomické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami n a p** *práve vtedy, keď*

1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots, n\}$;

2.

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x (1 - p)^{n-x} \text{ pre každé } x \in \{0, 1, 2, \dots, n\}. \quad (44)$$

Používame pritom označenie $X \sim bino(n; p)$.

Veta

Ak $X \sim bino(n; p)$, tak

$$E(X) = n \cdot p, \qquad D(X) = n \cdot p \cdot q \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{n \cdot p \cdot q}, \text{ kde } q = 1 - p. \quad (45)$$

Príklad

Predpokladajme, že hádžeme kockou. Vykonáme 4 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme číslo väčšie ako 4.

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Príklad

Predpokladajme, že hádžeme kockou. Vykonáme 4 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme číslo väčšie ako 4.

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Riešenie. a) Pravdepodobnosť, že pri hode kockou hodíme číslo väčšie ako 4, je $p = \frac{1}{3}$. Jedná sa o opakované nezávislé pokusy, náh. prem. X má binomické rozdelenie, teda $X \sim bino(4; \frac{1}{3})$. Máme $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vypočítame všetky pravdepodobnosti:

Príklad

Predpokladajme, že hádžeme kockou. Vykonáme 4 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme číslo väčšie ako 4.

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Riešenie. a) Pravdepodobnosť, že pri hode kockou hodíme číslo väčšie ako 4, je $p = \frac{1}{3}$. Jedná sa o opakované nezávislé pokusy, náh. prem. X má binomické rozdelenie, teda $X \sim bino(4; \frac{1}{3})$. Máme $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vypočítame všetky pravdepodobnosti:

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot (\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$; $\quad P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot (\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^3 = \frac{32}{81}$;

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 = \frac{24}{81}$; $\quad P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{2}{3})^1 = \frac{8}{81}$;

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{81}$.

Príklad

Predpokladajme, že hádžeme kockou. Vykonáme 4 hody. Nech X je náhodná premenná, ktorá reprezentuje počet hodov, pri ktorých hodíme číslo väčšie ako 4.

a) *zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X (pravdepodobnostnú tabuľku);*

b) *strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Riešenie. a) Pravdepodobnosť, že pri hode kockou hodíme číslo väčšie ako 4, je $p = \frac{1}{3}$. Jedná sa o opakované nezávislé pokusy, náh. prem. X má binomické rozdelenie, teda $X \sim bino(4; \frac{1}{3})$. Máme $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Vypočítame všetky pravdepodobnosti:

$P(X = 0) = \binom{4}{0} \cdot (\frac{1}{3})^0 \cdot (\frac{2}{3})^4 = \frac{16}{81}$; $P(X = 1) = \binom{4}{1} \cdot (\frac{1}{3})^1 \cdot (\frac{2}{3})^3 = \frac{32}{81}$;

$P(X = 2) = \binom{4}{2} \cdot (\frac{1}{3})^2 \cdot (\frac{2}{3})^2 = \frac{24}{81}$; $P(X = 3) = \binom{4}{3} \cdot (\frac{1}{3})^3 \cdot (\frac{2}{3})^1 = \frac{8}{81}$;

$P(X = 4) = \binom{4}{4} \cdot (\frac{1}{3})^4 \cdot (\frac{2}{3})^0 = \frac{1}{81}$.

Výsledky zapíšeme do tabuľky:

x_i	0	1	2	3	4
$P(X = x_i) = p_i$	$\frac{16}{81}$	$\frac{32}{81}$	$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{81}$	$\frac{1}{81}$

b) $E(X) = n \cdot p = 4 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $D(X) = n \cdot p \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$.

Poznámka. Môžete si overiť, že rovnaké hodnoty dostaneme aj použitím všeobecných vzorcov pre $E(X)$ a $D(X)$.

Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Toto rozdelenie pravdepodobnosti môže byť charakterizované modelom, v ktorom je daná množina objektov M, pričom K objektov má určitú vlastnosť a $M - K$ objektov nemá túto vlastnosť. Z tejto množiny vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že medzi vybratými objektmi je x takých, ktoré majú túto vlastnosť.

Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Toto rozdelenie pravdepodobnosti môže byť charakterizované modelom, v ktorom je daná množina objektov M, pričom K objektov má určitú vlastnosť a $M - K$ objektov nemá túto vlastnosť. Z tejto množiny vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že medzi vybratými objektmi je x takých, ktoré majú túto vlastnosť.

Definícia

Náhodná premenná X má **hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami M, K a N** *práve vtedy, keď*
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{\max\{0, K - M + N\}, \dots, \min\{K, N\}\}$;
2.

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}} \text{ pre každé } x \in \mathcal{H}(X). \tag{47}$$

Používame pritom označenie $X \sim hyge(M, K, N)$.

Hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti

Toto rozdelenie pravdepodobnosti môže byť charakterizované modelom, v ktorom je daná množina objektov M, pričom K objektov má určitú vlastnosť a $M - K$ objektov nemá túto vlastnosť. Z tejto množiny vyberieme bez vrátenia N objektov. Chceme vypočítať pravdepodobnosť, že medzi vybratými objektmi je x takých, ktoré majú túto vlastnosť.

Definícia

Náhodná premenná X má **hypergeometrické rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami M, K a N** *práve vtedy, keď*
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{\max\{0, K - M + N\}, \ldots, \min\{K, N\}\}$;
2.

$$P(X = x) = \frac{\binom{K}{x}\binom{M-K}{N-x}}{\binom{M}{N}} \text{ pre každé } x \in \mathcal{H}(X). \tag{47}$$

Používame pritom označenie $X \sim hyge(M, K, N)$.

Veta

Ak $X \sim hyge(M, K, N)$, *tak*

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M} \quad a \quad D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right). \tag{48}$$

Príklad

Triedny učiteľ zistil, že 12 z 30 študentov býva na stredoškolskom internáte. Náhodne vyberieme 10 študentov. Nech náhodná premenná X reprezentuje počet študentov, ktorí bývajú na stredoškolskom internáte medzi vybranými študentmi.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že najviac 3 študenti bývajú na internáte.*

b) *Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Veta

Ak $X \sim hyge(M, K, N)$, tak

$$E(X) = N \cdot \frac{K}{M} \quad a \quad D(X) = \frac{(M-N) \cdot N \cdot K}{(M-1) \cdot M} \left(1 - \frac{K}{M}\right). \tag{48}$$

Príklad

Triedny učiteľ zistil, že 12 z 30 študentov býva na stredoškolskom internáte. Náhodne vyberieme 10 študentov. Nech náhodná premenná X reprezentuje počet študentov, ktorí bývajú na stredoškolskom internáte medzi vybranými študentmi.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že najviac 3 študenti bývajú na internáte.*

b) *Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej X.*

Riešenie. $M = 30$; $N = 10$; $K = 12$.

a) $P(X \leq 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) =$

$$\frac{\binom{12}{0} \cdot \binom{18}{10}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{1} \cdot \binom{18}{9}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{18}{8}}{\binom{30}{10}} + \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{18}{7}}{\binom{30}{10}} = 0,34955$$

b) $E(X) = 10 \cdot \frac{12}{30} = 4$; $\qquad D(X) = \frac{(30-10) \cdot 10 \cdot 12}{(30-1) \cdot 30} \left(1 - \frac{12}{30}\right) = 1,655.$

Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskrétnej náhodnej premennej X, ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu...
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká v ľubovoľnom intervale.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ.

Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti

Poissonovo rozdelenie je rozdelenie diskrétnej náhodnej premennej X, ktoré má nasledovné vlastnosti:

- Experiment pozostáva z počítania, koľkokrát jav nastane v danom intervale. Interval môže byť interval času, vzdialenosti, plochy, objemu...
- Pravdepodobnosť, že k javu dôjde, je rovnaká v ľubovoľnom intervale.
- Počet výskytov javu v jednom intervale je nezávislý na počte výskytov v iných intervaloch.
- Priemerný počet výskytov javu je priamo úmerný dĺžke intervalu.
- Priemerný počet výskytov javu v danom intervale je známy a rovná sa číslu λ.

Definícia

Náhodná premenná X má **Poissonovo rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ** *práve vtedy, keď*
1. jej obor hodnôt je $\mathcal{H}(X) = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
2.

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x \cdot \mathrm{e}^{-\lambda}}{x!} \text{ pre každé } x \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{49}$$

Používame pritom označenie $X \sim poiss(\lambda)$.

Veta

Ak $X \sim poiss(\lambda)$, tak

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{50}$$

Príklad

Rybár chytí priemerne 2 ryby v priebehu 3 hodín. Predpokladajme, že rybár strávi pri rybníku 7 hodín. Aká je pravdepodobnosť, že chytí
a) práve 4 ryby, b) aspoň 3 ryby, c) aspoň 3, ale najviac 6 rýb?

Riešenie. X- počet rýb, ktoré rybár chytí za 7 hodín, $\lambda = E(X) = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

a) $P(X = 4) = \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} = 0,1858$

Veta

Ak $X \sim poiss(\lambda)$*, tak*

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{50}$$

Príklad

Rybár chytí priemerne 2 ryby v priebehu 3 hodín. Predpokladajme, že rybár strávi pri rybníku 7 hodín. Aká je pravdepodobnosť, že chytí
a) práve 4 ryby, b) aspoň 3 ryby, c) aspoň 3, ale najviac 6 rýb?

Riešenie. X- počet rýb, ktoré rybár chytí za 7 hodín, $\lambda = E(X) = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

a) $P(X = 4) = \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} = 0,1858$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$
$1 - [\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^0}{0!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^1}{1!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^2}{2!}] = 0,8443$

Veta

Ak $X \sim poiss(\lambda)$, tak

$$E(X) = \lambda, \qquad D(X) = \lambda \quad a \quad \sigma(X) = \sqrt{\lambda}. \tag{50}$$

Príklad

Rybár chytí priemerne 2 ryby v priebehu 3 hodín. Predpokladajme, že rybár strávi pri rybníku 7 hodín. Aká je pravdepodobnosť, že chytí
a) práve 4 ryby, b) aspoň 3 ryby, c) aspoň 3, ale najviac 6 rýb?

Riešenie. X- počet rýb, ktoré rybár chytí za 7 hodín, $\lambda = E(X) = 7 \cdot \frac{2}{3} = \frac{14}{3}$.

a) $P(X = 4) = \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} = 0,1858$

b) $P(X \geq 3) = 1 - P(X \leq 2) = 1 - [P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2)] =$
$1 - [\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^0}{0!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^1}{1!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^2}{2!}] = 0,8443$

c) $P(3 \leq X \leq 6) = P(X = 3) + P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) =$
$\dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^3}{3!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^4}{4!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^5}{5!} + \dfrac{e^{-\frac{14}{3}} \cdot (\frac{14}{3})^6}{6!} = 0,6534$

Spojitá náhodná premenná a jej hustota pravdepodobnosti

Príklady spojitej náhodnej premennej:

- doba, ktorú študent strávi pri príprave na skúšku,
- výška človeka,
- hmotnosť dieťaťa daného veku,
- polčas rozpadu rádioaktívnej látky,
- fyzikálne vlastnosti látok, napr. pevnosť, pružnosť, teplota topenia,...

Definícia

Náhodnú premennú X nazývame **spojitou** práve vtedy, keď existuje taká nezáporná a na množine $\mathbb{R}$ integrovateľná funkcia f, pre ktorú platí:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt, \quad x \in (-\infty, \infty), \tag{51}$$

kde F je distribučná funkcia náhodnej premennej X. Takejto funkcii f hovoríme **hustota pravdepodobnosti náhodnej premennej X**.

Poznámka: Distribučná funkcia $F(x)$ je definovaná rovnako ako pre diskrétnu náhodnú premennú vzťahom $F(x) = P(X \leq x)$.

Veta (Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti)

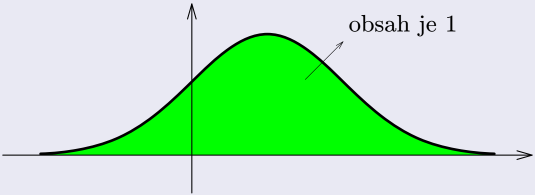
Pre spojitú náhodnú premennú platí:

1. *ak hodnota $f(x)$ existuje, tak* $f(x) \geq 0$;
2. *ak existuje derivácia $F'(x)$, tak* $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;

Veta (Vlastnosti hustoty pravdepodobnosti)

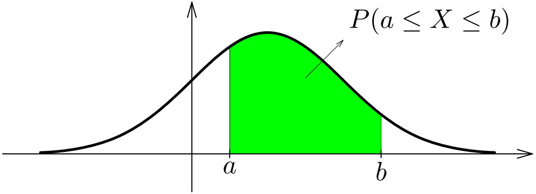
Pre spojitú náhodnú premennú platí:

1. *ak hodnota* $f(x)$ *existuje, tak* $f(x) \geq 0$;
2. *ak existuje derivácia* $F'(x)$*, tak* $F'(x) = f(x)$, $x \in \mathbb{R}$;
3. *tzv.„normalizačná podmienka“:* $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$,



Ďalšie vlastnosti spojitej náhodnej premennej:

1. $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = 0, \ \lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 1;$
2. distribučná funkcia $F(x)$ je spojitá na celej množine reálnych čísel;
3. pre každé $a \in \mathbb{R}$ je $P(X = a) = 0$;
4. $$\begin{aligned} P(a < X < b) &= P(a \le X < b) = P(a < X \le b) = \\ &= P(a \le X \le b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \end{aligned} \tag{52}$$



Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

Stredná hodnota a disperzia spojitej náhodnej premennej

Definícia

Nech je daný zákon rozdelenia pravdepodobnosti náhodnej premennej X. Pod **strednou hodnotou** spojitej náhodnej premennej X rozumieme číslo $E(X)$, ktoré je definované pre spojitú náhodnú premennú vzťahom

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx.$$

Pod **disperziou (rozptylom) náhodnej premennej** X rozumieme číslo $D(X)$, ktoré je definované vzťahom

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx.$$

Pod **smerodajnou odchýlkou náhodnej premennej** X rozumieme číslo $\sigma(X)$, ktoré je definované takto

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}. \tag{53}$$

Príklad

Daná je funkcia $F(x)=\begin{cases} a & pre\ x<-4,\\ bx+c & pre\ x\in\langle -4;2\rangle.\\ d & pre\ x>2.\end{cases}$ *Určte:*

a) *pre aké hodnoty* a, b, c, $d\in\mathbb{R}$ *je* F *distribučnou funkciu náh. prem.* X;

b) *hustotu pravdepodobnosti náhodnej premennej* X;

c) $P(X\leq 0)$, $P(-5\leq X<-3)$;

d) *strednú hodnotu* $E(X)$ *a disperziu* $D(X)$.

Riešenie. a)Pre výpočet koeficientov a, d použijeme vzťahy $\lim\limits_{x\to-\infty}F(x)=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}F(x)=1$.
Dostávame $a=0$, $d=1$. Koeficienty b, c určíme na základe spojitosti funkcie $F(x)$.
$F(x)$ je spojitá v bode $x=-4$, ak platí $-4b+c=0$.
$F(x)$ je spojitá v bode $x=2$, ak platí $2b+c=1$.
Dostávame sústavu dvoch lineárnych rovníc, riešením ktorej je $b=\frac{1}{6}$, $c=\frac{2}{3}$.

Teda $F(x)=\begin{cases} 0 & \text{pre } x<-4,\\ \frac{1}{6}x+\frac{2}{3} & \text{pre } x\in\langle -4;2\rangle,\\ 1 & \text{pre } x>2.\end{cases}$

b) Hustotu pravdepodobnosti $f(x)$ určíme zo vzťahu $f(x) = F^{'}(x)$. Dostávame

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < -4, \\ \frac{1}{6} & \text{pre } x \in \langle -4; 2 \rangle, \\ 0 & \text{pre } x > 2. \end{cases}$$

c) $P(X \leq 0) = F(0) = \frac{1}{6} \cdot 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$,
$P(-5 \leq X < -3) = F(-3) - F(-5) = \left(\frac{1}{6} \cdot (-3) + \frac{2}{3}\right) - 0 = \frac{1}{6}$.

d) $E(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx =$

$$\int\limits_{-\infty}^{-4} 0 \cdot x\, dx + \int\limits_{-4}^{2} \frac{1}{6} \cdot x\, dx + \int\limits_{2}^{\infty} 0 \cdot x\, dx = 0 + \left[\frac{1}{6}\frac{x^2}{2}\right]_{-4}^{2} = \frac{1}{12}(4 - 16) = -1$$

$$D(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x)\, dx = \int\limits_{-4}^{2} \frac{1}{6} \cdot (x+1)^2\, dx = \left[\frac{1}{6} \cdot \frac{(x+1)^3}{3}\right]_{-4}^{2} =$$

$$\frac{1}{18}(27 - (-27)) = \frac{54}{18} = 3$$

Príklad

Majme danú funkciu f predpisom $f(x) = \begin{cases} k\cdot(x+1) & \text{pre } x \in \langle -1, 0), \\ k & \text{pre } x \in \langle 0, 2), \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -1; 2\rangle; \end{cases}$

kde $k \in R$. Určme:

a) konštantu k tak, aby funkcia f bola hustotou pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej X;

b) predpis distribučnej funkcie tejto náhodnej premennej;

c) $P(0 < X)$.

a) Hodnotu k určíme z normalizačnej podmienky. Vypočítame

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{-1} 0\cdot\mathrm{d}x + \int_{-1}^{0} k\cdot(x+1)\cdot\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} k\cdot\mathrm{d}x + \int_{2}^{\infty} 0\cdot\mathrm{d}x =$$

$$0 + k\cdot\left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} + k\cdot\Big[x\Big]_{0}^{2} + 0 = \frac{1}{2}k + 2k$$

Podľa normalizačnej podmienky $\frac{1}{2}k + 2k = 1 \Rightarrow k = 0{,}4$. Dostávame

$$f(x) = \begin{cases} 0,4\cdot(x+1) & \text{pre } x \in \langle -1, 0), \\ 0,4 & \text{pre } x \in \langle 0, 2), \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -1; 2\rangle; \end{cases}$$

b) Na základe vzťahu $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$ je

- pre $x \in (-\infty, -1)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$;
- pre $x \in \langle -1, 0)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{x} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t = 0 + 0,4\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{x} =$ $0,4(\frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{2} + 1) = 0{,}2x^2 + 0,4x + 0,2 = 0,2(x+1)^2$;
- pre $x \in \langle 0, 2)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{x} 0{,}4\,\mathrm{d}t =$ $0 + 0,4\left[\frac{t^2}{2} + t\right]_{-1}^{0} + 0,4\left[t\right]_{0}^{x} = 0{,}2(2x+1)$; (po úprave)
- pre $x \in \langle 2, \infty)$: $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{-1} 0\,\mathrm{d}t + \int\limits_{-1}^{0} 0{,}4 \cdot (t+1)\,\mathrm{d}t + \int\limits_{0}^{2} 0{,}4\,\mathrm{d}t + \int\limits_{2}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 1$

Teda

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre} \quad x \in (-\infty, -1); \\ 0{,}2 \cdot (x+1)^2 & \text{pre} \quad x \in \langle -1, 0), \\ 0{,}2 \cdot (2x+1) & \text{pre} \quad x \in \langle 0, 2), \\ 1 & \text{pre} \quad x \in \langle 2, \infty). \end{cases}$$

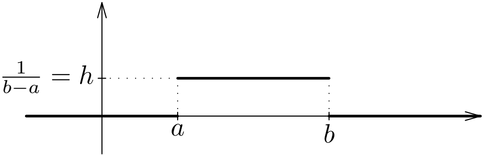
c) $P(X < 0) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x) \cdot \mathrm{d}x = \int\limits_{-1}^{0} 0,4 \cdot (x+1) \cdot \mathrm{d}x = 0,4 \cdot \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{0} = 0,2.$

Definícia

Náhodná premenná X má **spojité rovnomerné rozdelenie pravdepodobnosti na intervale $\langle a, b\rangle$** *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} h & \text{pre } x \in \langle a, b\rangle, \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle a, b\rangle, \end{cases} \tag{54}$$

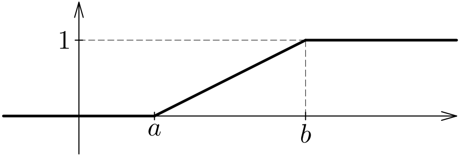
pre nejaké $h \in R$. Používame pritom označenie $X \sim unif(a; b)$.



Obr.: Graf hustoty pravdepodobnosti $f(x)$

Nájdenie predpisu pre distribučnú funkciu F:

- pre $x \in (-\infty, a)$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 0;$
- pre $x \in \langle a, b\rangle$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{x} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t = \frac{x-a}{b-a};$
- pre $x \in (b, \infty)$: $\quad F(x) = \int\limits_{-\infty}^{a} 0 \,\mathrm{d}t + \int\limits_{a}^{b} \frac{1}{b-a} \mathrm{d}t + \int\limits_{b}^{x} 0 \,\mathrm{d}t = 1.$



Obr.: Graf distribučnej funkcie $F(x)$

Veta

Ak $X \sim unif(a, b)$, tak

$$E(X) = \frac{a+b}{2}, \quad D(X) = \frac{(b-a)^2}{12} \quad a \quad \sigma(X) = \frac{b-a}{2 \cdot \sqrt{3}} \approx 0{,}2887 \cdot (b-a). \quad (55)$$

Príklad

Spoločnosť dodáva tovar v balíkoch s hmotnosťou 2 kg až 20 kg. Bolo zistené, že hmotnosť balíka má rovnomerné spojité rozdelenie medzi 2 kg a 20 kg.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že balík má hmotnosť medzi 10 kg a 15 kg?*

b) *Určte hmotnosť m, ktorá je prekročená s pravdepodobnosťou 0,7.*

Riešenie.

a) $P(10 \leq X \leq 15) = F(15) - F(10) = \frac{15-2}{20-2} - \frac{10-2}{20-2} = \frac{5}{18} = 0,2778$

b) $P(X > m) = 0,7 \Rightarrow 1 - P(X \leq m) = 0,7 \Rightarrow 1 - F(m) = 0,7 \Rightarrow F(m) = 0,3.$
Teda $\frac{m-2}{18} = 0,3 \Rightarrow m = 7,4$.

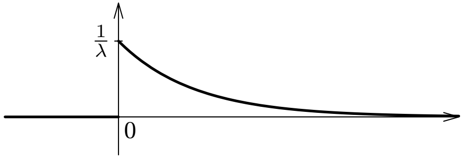
Exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti

Definícia

Náhodná premenná X má **exponenciálne rozdelenie pravdepodobnosti s parametrom λ** $(\lambda \in \mathbb{R}^+)$ *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda}\, \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0, \\ 0 & \text{pre } x < 0, \end{cases} \tag{56}$$

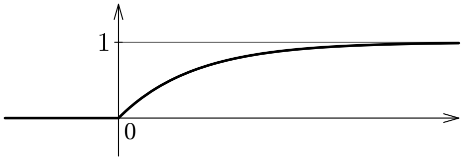
Používame pritom označenie $X \sim exp(\lambda)$.



Obr.: Hustota pravdepodobnosti $f(x)$

Distribučná funkcia je daná predpisom

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 0, \\ 1 - \mathrm{e}^{-\frac{x}{\lambda}} & \text{pre } x \geq 0. \end{cases} \tag{57}$$



Obr.: Distribučná funkcia $F(x)$

Veta

Ak $X \sim exp(\lambda)$, tak $E(X) = \lambda$, $\quad D(X) = \lambda^2 \quad$ a $\quad \sigma(X) = \lambda$.

Príklad

Pokiaľ zákazník volá na zákaznícku linku, doba, ktorú musí zákazník počkať, kým ho spoja s operátorom, má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 4 minúty.

a) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie maximálne 3 minúty?*

b) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie aspoň 5 minút?*

c) *Aká je pravdepodobnosť, že zákazník bude čakať na spojenie viac ako 3 minúty, ale menej ako 6 minút?*

d) *Určte dobu čakania, ktorá nebude prekročená s pravdepodobnosťou 0,9.*

Riešenie. Máme $E(X) = \lambda = 4$.

a) $P(X \leq 3) = F(3) = 1 - e^{-\frac{3}{4}} = 0,52763$

a) $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - (1 - e^{-\frac{5}{4}}) = e^{-\frac{5}{4}} = 0,28650$

c)$P(3 < X < 6) = F(6) - F(3) = (1 - e^{-\frac{6}{4}}) - (1 - e^{-\frac{3}{4}}) = 0,24923$

d) Označme ako t hľadanú dobu čakania. Máme $P(X < t) = 0,9 \Rightarrow$
$F(t) = 0,9 \Rightarrow 1 - e^{-\frac{t}{4}} = 0,9 \Rightarrow e^{-\frac{t}{4}} = 0,1 \Rightarrow t = -4 \cdot \ln 0,1 = 9,21.$
S pravdepodobnosťou 0,9 nebude prekročená doba čakania na spojenie 9,21 minút.

Normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti

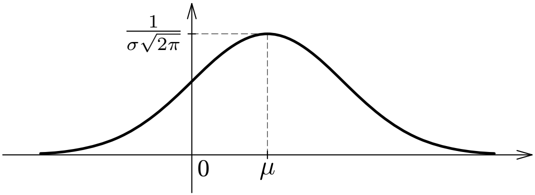
Vstup: Dve reálne čísla: $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}^+$.

Definícia

Náhodná premenná X má **normálne (Gaussovo) rozdelenie pravdepodobnosti s parametrami μ a σ** *práve vtedy, keď jej hustota f je určená predpisom*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \qquad \textit{pre každé } x \in R. \tag{58}$$

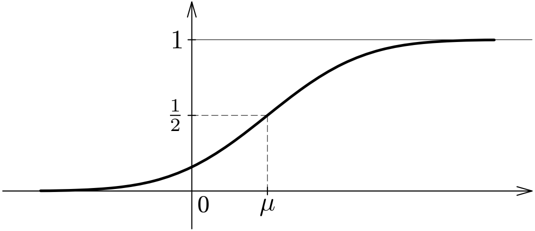
Používame pritom označenie $X \sim norm(\mu, \sigma)$ alebo $X \sim N(\mu, \sigma)$.



Obr.: Hustota pravdepodobnosti $f(x)$

Distribučná funkcia

$$F(x) = P(X \le x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{pre každé } x \in \mathbb{R}. \tag{59}$$



Obr.: Distribučná funkcia $F(x)$

Veta

Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak

$$E(X) = \mu, \qquad D(X) = \sigma^2 \quad a \quad \sigma(X) = \sigma. \tag{60}$$

Normovaná náhodná premenná

Definícia

Hovoríme, že náhodná premenná Y je **normovanou náhodnou premennou** práve vtedy, keď pre ňu platí $E(Y) = 0$ a $D(Y) = 1$.

Veta (Normovanie náhodnej premennej)

Nech X je náhodná premenná so známou strednou hodnotou a nenulovou disperziou. Potom náhodná premenná

$$Y = \frac{X - E(X)}{\sigma(X)} \tag{61}$$

je normovanou náhodnou premennou.

Normovaním náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$ dostaneme náhodnú premennú

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}, \qquad Y \sim norm(0, 1).$$

Hustota pravdepodobnosti a distribučná funkcia normovanej náhodnej premennej

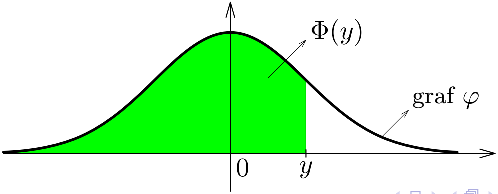
Hustota pravdepodobnosti φ normovanej náhodnej premennej Y je zrejme daná predpisom

$$\varphi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}} \qquad \text{pre každé } y \in \mathbb{R} \tag{62}$$

Distribučná funkcia Φ normovanej náhodnej premennej Y je daná predpisom

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} \mathrm{e}^{-\frac{u^2}{2}}\,\mathrm{d}u \qquad \text{pre každé } y \in R \tag{63}$$

Číslo $\Phi(y)$ určuje obsah vyznačeného útvaru.



Veta (Vlastnosti funkcií $\varphi(y)$ a $\Phi(y)$)

1. *Funkcia $\varphi(y)$ je párna.*
2. $\Phi(-y) = 1 - \Phi(y)$ *pre každé $y \in R$.*
3. $F(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$
4. $P(a < X \leq b) = P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$

Veta

Ak $X \sim norm(\mu, \sigma)$, tak pre ľubovoľné $\varepsilon > 0$ platí

$$P(|X - \mu| < \varepsilon) = P(\mu - \varepsilon < X < \mu + \varepsilon) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) - 1, \tag{64}$$

špeciálne pre $\varepsilon = 3\sigma$ je

$$P(|X - \mu| < 3\sigma) = P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 2 \cdot \Phi(3) - 1 \approx 0{,}9973 \tag{65}$$

Pravidlo troch sigma: v intervale $\mu \pm 3\sigma$ ležia takmer všetky hodnoty (presnejšie $99,73\,\%$) náhodnej premennej $X \sim norm(\mu, \sigma)$.

Príklad

Fabrika má stroj, ktorý plní kukuričné vločky do krabíc, ktoré sa predávajú ako 200 g balenia. Ak hmotnosť balenia má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 200 gramov a smerodajnou odchýlkou 15 gramov. Aká je pravdepodobnosť, že náhodne vybraná krabica má obsah s hmotnosťou

a) *menej ako 207 gramov,*
b) *viac ako 190 gramov,*
c) *medzi 180 a 210 gramov.*

Riešenie. Máme dané hodnoty $\mu = 200, \ \sigma = 15$. Hodnoty funkcie $\Phi(x)$ budeme hľadať v tabuľke s názvom **Distribučná funkcia normovaného náhodného rozdelenia**, ktorá je súčasťou súboru s názvom **NMPaMŠ-Štatistické tabuľky.**
a) $P(X < 207) = F(207) = \Phi(\frac{207-200}{15}) = \Phi(0,47) = 0,68082$ (hodnotu nájdeme v riadku prislúchajúcom hodnote 0,4 a stĺpci prislúchajúcom hodnote 7 (druhé desatinné miesto po správnom zaokrúhlení))
b) $P(X > 190) = 1 - P(X \leq 190) = 1 - F(190) = 1 - \Phi(\frac{190-200}{15}) = 1 - \Phi(-0,67) = 1 - (1 - \Phi(0,67)) = \Phi(0,67) = 0,74857$
c)$P(180 < X < 210) = F(210) - F(180) = \Phi(\frac{210-200}{15}) - \Phi(\frac{180-200}{15}) = \Phi(0,67) - \Phi(-1,33) = \Phi(0,67) - (1 - \Phi(1,33)) = \Phi(0,67) - 1 + \Phi(1,33) = 0,74857 - 1 + 0,90824 = 0,65681$