

# Súbor príkladov na precvičenie – Spojitá náhodná premenná

## 1. Číselné charakteristiky spojitej náhodnej premennej.

(a) Nech  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{for } x \leq -1, \\ k \cdot (x+1) & \text{for } -1 < x < 2, \\ 0 & \text{for } x \geq 2. \end{cases}$

- Vypočítajte konštantu  $k$  tak, aby  $f$  bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte  $P(-1 \leq X < 1)$ .
- Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$\left[ \text{i) } k = \frac{2}{9}; \text{ ii) } E(X) = 1, D(X) = \frac{1}{2}; \text{ iii) } \frac{4}{9}; \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq -1; \\ \frac{1}{9}(x+1)^2 & \text{pre } x \in \langle -1, 2 \rangle; \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases} \right]$$

(b) Nech  $f(x) = \begin{cases} a(3x-2), & \text{ak } x \in (2, 4), \\ 0, & \text{ak } x \notin (2, 4). \end{cases}$

- Určte hodnotu parametra  $a$  tak, aby  $f$  bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte pravdepodobnosť  $P(1 < X \leq 3)$ .
- Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$\left[ \text{i) } a = \frac{1}{14}; \text{ ii) } E(X) = \frac{22}{7}, D(X) = \frac{46}{147}; \text{ iii) } \frac{11}{28}; \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 2; \\ \frac{1}{84}(9x^2 - 12x - 12) & \text{pre } x \in \langle 2, 4 \rangle; \\ 1 & \text{pre } x > 4. \end{cases} \right]$$

(c) (6 b) Nech  $f(x) = \begin{cases} a(2x-1), & \text{ak } x \in (2, 3), \\ 0, & \text{ak } x \notin (2, 3). \end{cases}$

- Určte hodnotu parametra  $a$  tak, aby  $f$  bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte pravdepodobnosť  $P(1 < X \leq 2, 5)$ .

$$[\text{i) } a = \frac{1}{4}; \text{ ii) } E(X) = \frac{61}{24}; \text{ iii) } 0,4375]$$

(d) Nech  $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{ak } x < 1, \\ k \cdot \sqrt{x}, & \text{ak } 1 \leq x \leq 4, \\ 0, & \text{ak } x > 4. \end{cases}$

- Vypočítajte konštantu  $k$  tak, aby  $f$  bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte  $P(2 \leq X < 3)$  a  $P(0,5 < X \leq 5)$ .
- Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$\left[ \text{i) } k = \frac{3}{14}; \text{ ii) } E(X) = \frac{93}{35}, D(X) = \frac{876}{1225}; \text{ iii) } \frac{1}{7}(3\sqrt{3} - 2\sqrt{2}); \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x < 1; \\ \frac{1}{7}(x\sqrt{x} - 1) & \text{pre } x \in \langle 1, 4 \rangle; \\ 1 & \text{pre } x > 4. \end{cases} \right]$$

(e) Nech  $f(x) = \begin{cases} ax+1, & \text{ak } x \in (0, 2), \\ 0, & \text{ak } x \notin (0, 2). \end{cases}$

- Určte hodnotu parametra  $a$  tak, aby  $f$  bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte pravdepodobnosť  $P(1 < X \leq 2)$ .
- Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$\left[ \text{i) } a = -\frac{1}{2}; \text{ ii) } E(X) = \frac{2}{3}; \text{ iii) } \frac{1}{4}; \text{ iv) } F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 0; \\ \frac{1}{4}(4x - x^2) & \text{pre } x \in (0, 2); \\ 1 & \text{pre } x > 2. \end{cases} \right]$$

(f) Daná je funkcia  $f(x) = \begin{cases} ax & \text{pre } x \in (0; 1) \\ 2a - ax & \text{pre } x \in \langle 1; 2 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin (0; 2). \end{cases}$

- Určte hodnotu parametra  $a$  tak, aby  $f$  bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- Nájdite predpis distribučnej funkcie.

$$[\text{i)} a = 1; \text{ii)} E(X) = 1, D(X) = \frac{1}{6}; \text{iii)} F(x) = \begin{cases} 0 & \text{pre } x \leq 0; \\ -\frac{1}{2}x^2 + 2x - 1 & \text{pre } x \in (0, 1); \\ 1 & \text{pre } x \in \langle 1; 2 \rangle; \\ & \text{pre } x \geq 2. \end{cases}]$$

(g) Daná je funkcia  $f(x) = \begin{cases} a & \text{pre } x \in (-2; -1) \\ 2a & \text{pre } x \in (1; 2) \\ 0 & \text{pre } x \notin (-2, -1) \cup (1; 2). \end{cases}$

- Určte hodnotu parametra  $a$  tak, aby  $f$  bola hustota pravdepodobnosti nejakej náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte  $P(X \leq 0)$ ,  $P(X \geq -1, 5)$ .

$$[\text{i)} a = \frac{1}{3}; \text{ii)} E(X) = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{25}{12}; \text{iii)} P(X \leq 0) = \frac{1}{3}, P(X \geq -1, 5) = \frac{5}{6}.]$$

(h) Daná je funkcia:  $F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b \cdot (x^2 - 1), & \text{ak } 1 \leq x \leq 3, \\ c, & \text{ak } x > 3. \end{cases}$

- Stanovte parametre  $a, b$  tak, aby  $F(x)$  bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej  $X$ .
- Určte hustotu pravdepodobnosti  $f(x)$  náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte pravdepodobnosť  $P(0 \leq X < 2)$ .

$$[\text{i)} a = 0, b = \frac{1}{8}, c = 1; \text{ii)} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x & \text{pre } x \in \langle 1, 3 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 1, 3 \rangle. \end{cases} ; \text{iii)} E(X) = \frac{13}{6}, \text{iv)} \frac{3}{8}]$$

(i) Daná je funkcia:  $F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < -4, \\ bx + c, & \text{ak } -4 \leq x \leq 2, \\ d, & \text{ak } x > 2. \end{cases}$

- Stanovte parametre  $a, b, c, d$  tak, aby  $F(x)$  bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej  $X$ .
- Určte hustotu pravdepodobnosti  $f(x)$  náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte pravdepodobnosť  $P(-5 \leq X < -3)$ .

$$[\text{i)} a = 0, b = \frac{1}{6}, c = \frac{2}{3}, d = 1; \text{ii)} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & \text{pre } x \in \langle -4, 2 \rangle; \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle -4, 2 \rangle; \end{cases} \text{iii)} E(X) = -1; \text{iv)} \frac{1}{6}]$$

(j) Daná je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 0, \\ x + b, & \text{ak } 0 \leq x \leq 1, \\ c, & \text{ak } x > 1. \end{cases}$$

- Stanovte parametre  $a, b, c$  tak, aby  $F(x)$  bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej  $X$ .
- Určte hustotu pravdepodobnosti  $f(x)$  náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .

$$[\text{i)} a = b = 0, c = 1; \text{ii)} f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x \in \langle 0, 1 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 0, 1 \rangle; \end{cases} ; \text{iii)} E(X) = \frac{1}{2}, D(X) = \frac{1}{12}]$$

(k) Daná je funkcia

$$F(x) = \begin{cases} a, & \text{ak } x < 1, \\ b\sqrt{x} + c, & \text{ak } 1 \leq x \leq 9, \\ 2d, & \text{ak } x > 9. \end{cases}$$

- Stanovte parametre  $a, b, c$  tak, aby  $F(x)$  bola distribučná funkcia spojitej náhodnej premennej  $X$ .
- Určte hustotu pravdepodobnosti  $f(x)$  náhodnej premennej  $X$ .
- Vypočítajte strednú hodnotu a disperziu náhodnej premennej  $X$ .

$$[\text{i)} a = 0, b = \frac{1}{2}, c = -\frac{1}{2}, d = \frac{1}{2}; \text{ii)} f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4\sqrt{x}} & \text{pre } x \in \langle 1, 9 \rangle \\ 0 & \text{pre } x \notin \langle 1, 9 \rangle; \end{cases} ; \text{iii)} E(X) = \frac{13}{3}, D(X) = \frac{244}{45}]$$

## 2. Exponenciálne rozdelenie

- (a) Priemerná doba životnosti súčiastky je 600 hodín. Doba životnosti má exponenciálne rozdelenie. Vypočítajte pravdepodobnosť, že náhodne vybraná súčiastka bude fungovať
- i. menej ako 800 hodín,
  - ii. viac ako 500 hodín,
  - iii. viac ako 600, ale menej ako 700 hodín.
  - iv. Určte takú hodnotu  $t$ , že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako  $t$  hodín, je 0,9.
- [i) 0,7364; ii) 0,4346; iii) 0,0564; iv)  $t = 63,22$  hod.]
- (b) Doba životnosti elektronickej súčiastky má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 800 hodín. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. súčiastka sa nepokazí v priebehu 1000 hodín,
  - ii. súčiastka sa pokazí skôr ako za 600 hodín,
  - iii. súčiastka sa pokazí neskôr ako za 500 hodín, ale skôr ako za 800 hodín.
  - iv. Určte takú hodnotu  $t$ , že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude dlhšia ako  $t$  hodín, je 0,95.
- [i) 0,2865; ii) 0,5276; iii) 0,16738; iv)  $t = 41,03$  hod.]
- (c) Doba, za ktorú je zákazník obslužený po príchode do predajne má exponenciálne rozdelenie so strednou hodnotou 4 minúty. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. zákazník je obslužený do 5 minút po príchode do predajne,
  - ii. zákazník nebude je obslužený v priebehu 7 minút po príchode do predajne,
  - iii. zákazník čaká na obsluhu viac ako 3 minúty, ale najviac 6 minút.
  - iv. Určte, do koľkých minút po príchode do predajne bude zákazník obslužený s pravdepodobnosťou 0,99.
- [i) 0,71350; ii) 0,17377; iii) 0,24924; iv)  $t = 18,42$  min.]
- (d) Priemerná doba bezchybného fungovania výrobku je 10000 hodín, pričom predpokladáme že táto doba sa riadi exponenciálnym rozdelením. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. výrobok sa pokazí skôr ako za 2000 hodín,
  - ii. výrobok bude fungovať bezchybne viac ako 12000 hodín,
  - iii. výrobok bude fungovať bezchybne viac ako 8000, ale menej ako 13 000 hodín.
  - iv. Určte takú hodnotu  $t$ , že pravdepodobnosť toho, že doba životnosti bude kratšia ako  $t$  hodín, je 0,15.
- [i) 0,1813; ii) 0,3012; iii) 0,1768; iv)  $t = 1625,19$  hod.]

## 3. Normálne rozdelenie

- (a) Pružnosť náhodne vybraného výrobku má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 3,5 a smerodajnou odchýlkou 0,4. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybraný výrobok je má pružnosť menšiu ako 3,7,
  - ii. náhodne vybraný výrobok je má pružnosť väčšiu ako 3,1,
  - iii. náhodne vybraný výrobok je má pružnosť v intervale  $\langle 3, 2, 5, 2 \rangle$ .
- [i) 0,69146; ii) 0,84134; iii) 0,77336]
- (b) Výška dospelého muža má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 177 cm smerodajnou odchýlkou 5 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybraný muž má výšku menšiu ako 180 cm,
  - ii. náhodne vybraný muž má výšku väčšiu ako 170 cm,
  - iii. náhodne vybraný muž má výšku v intervale  $\langle 165 \text{ cm}, 192 \text{ cm} \rangle$ .
- [i) 0,72575; ii) 0,91924; iii) 0,99045]
- (c) Pevnosť v ťahu náhodne vybraného výrobku má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 2,4 a smerodajnou odchýlkou 0,6. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- i. náhodne vybraný výrobok je má pevnosť v ťahu menšiu ako 4,
  - ii. náhodne vybraný výrobok je má pevnosť v ťahu väčšiu ako 2,2,
  - iii. náhodne vybraný výrobok je má pevnosť v ťahu v intervale  $\langle 2, 1; 5, 2 \rangle$ .
- [i) 0,99621; ii) 0,6293; iii) 0,69146]

- (d) Výška päťročného dieťaťa má normálne rozdelenie so strednou hodnotou 110 cm smerodajnou odchýlkou 6 cm. Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- náhodne vybrané dieťa má výšku menšiu ako 105 cm,
  - náhodne vybrané dieťa má výšku väčšiu ako 120 cm,
  - náhodne vybrané dieťa má výšku v intervale  $\langle 100 \text{ cm}, 140 \text{ cm} \rangle$ .
- [i) 0,20327; ii) 0,04746; iii) 0,95254]
- (e) Výskum ukázal, že ročná spotreba teplej vody v domácnostiach má normálne rozdelenie so strednou hodnotou  $60 \text{ m}^3$  a smerodajnou odchýlkou  $10 \text{ m}^3$ . Vypočítajte pravdepodobnosť toho, že
- náhodne vybraná domácnosť má spotrebu vyššiu ako  $70 \text{ m}^3$ ,
  - náhodne vybraná domácnosť má spotrebu nižšiu ako  $65 \text{ m}^3$ ,
  - náhodne vybraná domácnosť má spotrebu v intervale od  $58 \text{ m}^3$  do  $64 \text{ m}^3$ .
- [i) 0,15866; ii) 0,69146; iii) 0,23468]