Racionálne funkcie

streda 24. septembra 2025 7:30

PR1: $R(x) = \dfrac{2x^2+10x-18}{x^4-2x^3-5x^2+6x}$ $2<4$ RÝDZORACIONÁLNA

$\dfrac{2x^2+10x-18}{x(x-1)(x-3)(x+2)} = \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-1} + \dfrac{C}{x-3} + \dfrac{D}{x+2} \quad / \cdot x(x-1)(x-3)(x+2)$

$2x^2+10x-18 = A(x-1)(x-3)(x+2) + Bx(x-3)(x+2) + Cx(x-1)(x+2) + Dx(x-1)(x-3)$

DOSADZOVACIA METÓDA

KOREŇE

$x=0$	$-18 = A(-1)(-3)\cdot 2$	$6A=-18$	$A=-3$
$x=1$	$-6 = B\cdot 1\cdot(-2)\cdot 3$	$-6B=-6$	$B=1$
$x=3$	$30 = C\cdot 3\cdot 2\cdot 5$	$30C=30$	$C=1$
$x=-2$	$-30 = D(-2)(-3)(-5)$	$-30D=-30$	$D=1$

$\dfrac{2x^2+10x-18}{x^4-2x^3-5x^2+6x} = -\dfrac{3}{x} + \dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x-3} + \dfrac{1}{x+2}$

PR2 $R(x) = \dfrac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}$ $2<3$ RÝDZORAC. FCIA

$\dfrac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+2} + \dfrac{C}{(x+2)^2} \quad / \cdot (x-1)(x+2)^2$

SPOLOČNÝ MENOVATEĽ

$5x^2+12x+1 = A(x+2)^2 + B(x-1)(x+2) + C(x-1)$

$x=1$ $\quad 18 = A\cdot 3^2 \quad 9A=18$

$x=-2$ $\quad -3 = -3C$

$A=2$, $C=1$

DOSADÍME AKÉKOĽVEK ČÍSLO, KTORÉ SME EŠTE NEPOUŽILI

$x=0$ $\quad 1 = A\cdot 2^2 + B(-1)\cdot 2 + C\cdot(-1)$

A DOSADÍME $A=2$ a $C=1$

$1 = 2\cdot 4 + B(-2) + 1\cdot(-1) \quad -2B=-6 \quad B=3$

$\dfrac{5x^2+12x+1}{(x-1)(x+2)^2} = \dfrac{2}{x-1} + \dfrac{3}{x+2} + \dfrac{1}{(x+2)^2}$

PR3 $R(x) = \dfrac{x^4+5x^3+11x^2+8x-7}{x^3+3x^2-4}$ $4>3$ NIE JE RÝDZORACIONÁLNA

DELÍME

$(x^4+5x^3+11x^2+8x-7) : (x^3+3x^2-4) = x+2 + \dfrac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}$

$-(x^4+3x^3 \quad -4x)$

$\dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$

$(x^4+3x^3+11x^2+8x-7) : (x^3+3x^2-4) = x+3 + \frac{5x^2+12x+1}{x^3+3x^2-4}$

$-(x^4+3x^3-4x)$

$2x^3+11x^2+12x-7$

$-(2x^3+6x^2-8)$

$5x^2+12x+1$

x^3+3x^2-4 — PR 2 — RÝDZORAC

$x^n - 1$

PR 4 $R(x) = \frac{5x^2-5x+9}{x^3-3x^2+4x-12}$ $2<3$

$\frac{5x^2-5x+9}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{A}{x-3} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ / $\cdot (x-3)(x^2+4)$

$5x^2-5x+9 = A(x^2+4) + (Bx+C)(x-3)$

$x=3$ KOREŇ: $39 = 13A$ $A=3$

$x=0$!: $9 = 3\cdot 4 + C\cdot(-3)$ $-3C=-3$ $C=1$

$x=1$ ĽUBOVOĽNÉ: $9 = 3\cdot 5 + (B\cdot 1+1)(-2)$ $-2B=-4$ $B=2$

$\frac{5x^2-5x+9}{(x-3)(x^2+4)} = \frac{3}{x-3} + \frac{2x+1}{x^2+4}$

PR 5 $R(x) = \frac{5x^2-x+8}{x^3+4x}$ $2<3$ RÝDZOR. F.

$\frac{5x^2-x+8}{x(x^2+4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+4}$ / $\cdot x(x^2+4)$

$5x^2-x+8 = A(x^2+4) + (Bx+C)x$

$x=0$: $8 = 4A$ $A=2$

$x=1$ } ĽUBOVOĽNÉ: $12 = 2\cdot 5 + (B+C)\cdot 1$

$x=-1$ }: $14 = 2\cdot 5 + (B+C)\cdot(-1)$

SÚSTAVA: $B+C=2$, $B-C=4$

RIEŠIME SÚSTAVU $B+C=2 \rightarrow C=2-B$

SČÍTAME: $B-C=4$, $+$, $2B=6$ $B=3$

$C=2-B=2-3=-1$

$\frac{5x^2-x+8}{x^3+4x} = \frac{2}{x} + \frac{3x-1}{x^2+4}$

PR 6 $R(x) = \frac{2x^4+x^3-x+1}{x^3+1}$ $4>3$ NIE JE RÝDZORAC.

$2x^4+x^3-x+1 : (x^3+1) = 2x+1 - \frac{3x^1}{x^3+1}$

$$(2x^4+x^3-x+1) : (x^3+1) = 2x+1 - \frac{x^3+1}{x^3+1}$$

$-(2x^4+2x)$

x^3-3x+1

$-(x^3+1)$

$-3x$

RÝDZOR AC . F

$$\frac{-3x}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad / \cdot (x+1)(x^2-x+1)$$

$$-3x = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

$x=-1$ $\quad 3 = A \cdot 3 \quad A = 1$.

$x=0$. $\quad 0 = 1+C \quad C=-1$.

$x=1$ ĽUBOV. $\quad -3 = 1\cdot 1 + (B-1)\cdot 2$

$2B = -2 \quad B = -1$.

$$\frac{2x^4+x^3-x+1}{x^3+1} = 2x+1 + \frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2-x+1}$$

$x^2-4x+4 = (x-2)^2$ ✓

$x^2-2x = x(x-2)$

$3<4$ RÝDZOR . F.

PR 7

$$R(x) = \frac{3x^3-14x^2+27x-16}{(x^2-4x+4)\cdot(x^2-2x)} = \frac{3x^3-14x^2+27x-16}{(x-2)^2 \cdot x(x-2)} = x(x-2)^3$$

x^4

$$\frac{3x^3-14x^2+27x-16}{x(x-2)^3} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

$\cdot x(x-2)^3$

$$3x^3-14x^2+27x-16 = A(x-2)^3 + Bx(x-2)^2 + Cx(x-2) + Dx$$

$x=0$ } KORENE

$x=2$ }

$-16 = -8A \quad A=2$. } → DOSADIŤ

$6 = 2D \quad D=3$. }

$x=1$ } ĽUBOVOĽNÉ

$x=-1$ }

$0 = 2(-1) + B\cdot 1 + C(-1) + 3 \rightarrow B-C=-1$

$-60 = -27\cdot 2 - B\cdot 9 - C(-3) - 3 \rightarrow 3B-C=1$

$/\cdot 3$

RIEŠIME SÚSTAVU

$$\begin{aligned} B-C &= -1 \\ 3B-C &= 1 \end{aligned}$$

ROZDIEL ⊖ $\quad 2B = 2 \quad B=1$.

$C = B+1 = 1+1 = 2$.

$$\frac{3x^3-14x^2+27x-16}{x(x-2)^3} = \frac{2}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{2}{(x-2)^2} + \frac{3}{(x-2)^3}$$

PR 8

$$R(x) = \frac{5x^2 - x + 12}{x^3 + x^2 + 3x - 5}$$

$2 < 3$ RYDZORAC. F.

$$\frac{5x^2 - x + 12}{(x-1)(x^2+2x+5)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+5} \quad / \cdot (x-1)(x^2+2x+5)$$

$$5x^2 - x + 12 = A(x^2+2x+5) + (Bx+C)(x-1)$$

POROVNÁVACIA METÓDA $\rightarrow$ ROZNÁSOBÍME

$$5x^2 - x + 12 = Ax^2 + 2Ax + 5A + Bx^2 - Bx + Cx - C$$

$$5x^2 - x + 12 = (A+B)x^2 + (2A - B + C)x + (5A - C)x^0 \neq 1$$

POROVNÁME KOEFICIENTY PRI ROVNAKÝCH MOCNINÁCH

x^2: $5 = 1A + B + 0 \cdot C$

x^1: $-1 = 2A - B + C$

x^0: $12 = 5A + 0B - C$

VYRIEŠIME SÚSTAVU GAUSSOVA METÓDA

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \\ 5 & 0 & -1 & 12 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -5R_1 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & -3 & 1 & -11 \\ 0 & -5 & -1 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{array} \approx$$

$$\approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & 5 & 1 & 13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \cdot 3 - 5R_2 \end{array} \approx \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 11 \\ 0 & 0 & 8 & -16 \end{array}\right)$$

$5 \cdot 3 - 5 \cdot 3 = 0$

$A + B + 0 \cdot C = 5$ ✓

$3B - 1 \cdot C = 11$

$8C = -16$

$8C = -16 \quad C = -2$

$3B - C = 11 \quad 3B = C + 11 = -2 + 11 \quad 3B = 9 \quad B = 3$

$A + B = 5 \quad A = 5 - B = 5 - 3 = 2$

$$\frac{5x^2 - x + 12}{x^3 + x^2 + 3x - 5} = \frac{2}{x-1} + \frac{3x-2}{x^2+2x+5}$$