

Technická univerzita v Košiciach



MATEMATIKA I v príkladoch

pre

Aplikovanú informatiku

1. časť

Anna Grinčová

Košice 2025

Technická univerzita v Košiciach



MATEMATIKA I v príkladoch

pre

Aplikovanú informatiku

1. časť

Anna Grinčová

Košice 2025

RECENZOVALI: doc. RNDr. Blanka Baculíková, PhD.
doc. RNDr. Miriam Andrejiová, PhD.

1. vydanie

Za odbornú stránku učebného textu zodpovedajú autori.
Rukopis neprešiel redakčnou ani jazykovou úpravou.

© Anna Grinčová

ISBN

OBSAH

Úvod

1

1 KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1.1	TVARY KOMPLEXNÝCH ČÍSEL	2
1.2	OPERÁCIE S KOMPLEXNÝMI ČÍSLAMI V ALGEBRAICKOM TVARE	2
1.3	PREPIS KOMPLEXNÉHO ČÍSLA V ALGEBRAICKOM TVARE DO INÉHO TVARU	5
1.4	OPERÁCIE S KOMPLEXNÝMI ČÍSLAMI V GONIOMETRICKOM TVARE	7
1.5	OPERÁCIE S KOMPLEXNÝMI ČÍSLAMI V EXPONENCIÁLNO M TVARE	10

2 MATICE

2.1	OPERÁCIE S MATICAMI	16
2.2	HODNOSŤ MATICE	17

3 DETERMINANTY

3.1	VÝPOČET DETERMINANTU ROZMERU 2x2	22
3.2	VÝPOČET DETERMINANTU ROZMERU 3x3	22
3.3	VÝPOČET DETERMINANTU ROZMERU 4x4 A VYŠŠIEHO ROZMERU	22
3.4	INVERZNÁ MATICA	26

4 SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

4.1	GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA	29
4.2	CRAMEROVO PRAVIDLO	37

POUŽITÁ LITERATÚRA

41

ÚVOD

Táto učebná pomôcka je určená pre študentov prvého ročníka bakalárskej formy štúdia študijného programu Aplikovaná informatika na Fakulte elektrotechniky a informatiky Technickej univerzity v Košiciach (FEI TU), ale môže poslúžiť aj študentom iných fakúlt.

1. časť učebnice je rozdelená do štyroch kapitol, ktoré obsahujú základné teoretické poznatky potrebné k riešeniu príkladov, vzorové riešené aj neriešené úlohy k učivu preberanému v predmete Matematika I pre Aplikovanú informatiku.

Cieľom tejto učebnej pomôcky nebolo podať ucelený teoretický prehľad riešenej problematiky v predmete Matematika I pre Aplikovanú informatiku, preto je vhodné kombinovať používanie tejto učebnice s voľne dostupnými e-learningovými materiálmi Katedry matematiky a teoretickej informatiky FEI TU.

Na záver ďakujem doc. RNDr. Blanke Baculíkovej, CSc. a doc. RNDr. Miriam Andrejiovej, PhD. za starostlivé prečítanie rukopisu a za cenné pripomienky, ktorými prispeli k zlepšeniu textu tejto učebnice.

Autorka

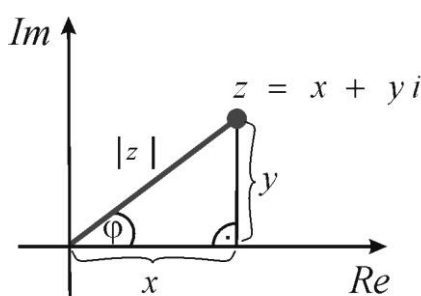
1 KOMPLEXNÉ ČÍSLA

1.1 Tvary komplexných čísel

Algebraický tvar: $z = x + yi$

Goniometrický tvar: $z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$

Exponenciálny tvar: $z = |z|e^{i\varphi}$



Obr. 1 Znáročenie komplexného čísla v Gaussovej rovine

1.2 Operácie s komplexnými číslami v algebraickom tvare

Súčet a rozdiel komplexných čísel

Súčet a rozdiel komplexných čísel v algebraickom tvare robíme po zložkách. Osobitne sčítame (odčítame) reálne a osobitne sčítame (odčítame) imaginárne zložky.

$$\begin{aligned} \text{Nech } z_1 &= x_1 + y_1 i \\ z_2 &= x_2 + y_2 i \end{aligned}$$

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i,$$

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 i) - (x_2 + y_2 i) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) i.$$

Príklad 1 Nech $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -4 + i$, $z_3 = 2 + 3i$. Vypočítajte $z_1 + z_2$, $z_3 - z_2$.

Riešenie:

$$z_1 + z_2 = (3 - 2i) + (-4 + i) = 3 - 4 - 2i + i = -1 - i,$$

$$z_3 - z_2 = (2 + 3i) - (-4 + i) = 2 + 4 + 3i - i = 6 + 2i.$$

Súčin komplexných čísel

Ak komplexné čísla v algebraickom tvare násobíme, pracujeme s nimi ako pri násobení dvojčlenov. Teda násobíme každú zložku s každou.

Pritom využívame, že $i^1 = i, i^2 = -1, i^3 = -i, i^4 = 1,$
 $i^5 = i, i^6 = -1, i^7 = -i, i^8 = 1, \dots$

$$\text{Nech } \begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 i \\ z_2 &= x_2 + y_2 i \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + y_1 i) \cdot (x_2 + y_2 i) = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 i^2 = x_1 x_2 + x_1 y_2 i + x_2 y_1 i + y_1 y_2 (-1) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1) i.$$

Príklad 2 Nech $z_1 = 3 - 2i$, $z_2 = -4 + i$. Vypočítajme $z_1 \cdot z_2$.

Riešenie:

$$z_1 \cdot z_2 = (3 - 2i)(-4 + i) = 3(-4) + 3i - 2i(-4) - 2i^2 = -12 + 3i + 8i - 2(-1) = -10 + 11i.$$

Podiel komplexných čísel

Pri delení komplexných čísel v algebraickom tvare násobíme celý podiel „jednotkou vo vhodnom tvare“ tak, aby sme v menovateli odstránili komplexné číslo. Využívame pritom násobenie komplexného čísla v menovateli k nemu komplexne združeným číslom, čím v menovateli získame reálne číslo.

Ak $z = x + yi$, tak **komplexne združené číslo** k číslu z je $\bar{z} = x - yi$.

$$\text{Platí } z \cdot \bar{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 + y^2$$

$$\text{Nech } \begin{aligned} z_1 &= x_1 + y_1 i \\ z_2 &= x_2 + y_2 i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1}{z_2} \cdot \frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2} = \frac{(x_1 + y_1 i)}{(x_2 + y_2 i)} \cdot \frac{(x_2 - y_2 i)}{(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 + y_1 i)(x_2 - y_2 i)}{(x_2 + y_2 i)(x_2 - y_2 i)} = \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + (y_1 x_2 - x_1 y_2) \cdot i}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \frac{y_1 x_2 - x_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} i. \end{aligned}$$

Príklad 3 Nech $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -4 + 2i$. Vypočítajme $\frac{z_1}{z_2}$.

Riešenie:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 + 3i}{-4 + 2i} \cdot \frac{-4 - 2i}{-4 - 2i} = \frac{2(-4) + 2(-2i) + 3i(-4) + 3i(-2i)}{(-4)^2 + (2)^2} = \frac{-8 - 4i - 12i + 6}{16 + 4} = \frac{-2 - 16i}{20} = -\frac{1}{10} - \frac{4}{5}i.$$

Umocňovanie komplexných čísel

Umocňovanie komplexných čísel v algebraickom tvare je výhodné iba pri „nízkych“ mocninách (umocňovanie na druhú, tretiu, ...). Pri umocňovaní komplexných čísel v algebraickom tvare využívame známe vzorce alebo postupné násobenie rovnakých čísel.

$$\begin{array}{ll} (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 & \text{alebo} \quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) \\ (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 & \text{alebo} \quad (a-b)^2 = (a-b)(a-b) \\ (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 & \text{alebo} \quad (a+b)^3 = (a+b)(a+b)(a+b) \\ (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 & \text{alebo} \quad (a-b)^3 = (a-b)(a-b)(a-b) \end{array}$$

Nech $z = x + yi$

$$\begin{aligned} z^2 &= (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi + (yi)^2 = x^2 + 2xyi + y^2i^2 = x^2 - y^2 + 2xyi, \\ z^3 &= (x + yi)^3 = x^3 + 3x^2yi + 3x(yi)^2 + (yi)^3 = x^3 + 3x^2yi - 3xy^2 - y^3i = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i. \end{aligned}$$

Príklad 4 Nech $z = -2 - 3i$. Vypočítajte z^2 .

Riešenie:

V tejto úlohe vyžijeme, že $z^2 = z \cdot z$ a čísla medzi sebou vynásobíme (použijeme iný spôsob umocnenia, nie pomocou vzorca).

$$z^2 = (-2 - 3i)(-2 - 3i) = (-2)(-2) - 2(-3i) - 3i(-2) - 3i(-3i) = 4 + 6i + 6i - 9 = -5 + 12i.$$

Neriešené úlohy

V úlohách 1 – 18 vypočítajte a upravte na algebraický tvar:

Výsledky:

- | | | |
|-----|----------------------------------|------------------------------|
| 1. | $(3 + 2i) + (2 - i)$ | $5 + i$ |
| 2. | $(3 + 2i) - (2 - i)$ | $1 + 3i$ |
| 3. | $(-2 + i) - (4 - 3i) + (7 - 4i)$ | 1 |
| 4. | $(3 + 2i)(2 - i)$ | $8 + i$ |
| 5. | $(-3 + 2i)(2 + i)$ | $-8 + i$ |
| 6. | $(3 + 3i)(1 - i)$ | 6 |
| 7. | $(-2 + 3i)(4 + i)$ | $-11 + 10i$ |
| 8. | $(1 + i)(3 + 2i)(2 - i)$ | $7 + 9i$ |
| 9. | $\frac{2 + i}{1 + i}$ | $\frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$ |
| 10. | $\frac{3 + 2i}{2 - i}$ | $\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i$ |

$$11. \quad \frac{2-i}{3+2i} \qquad \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

$$12. \quad \frac{1}{\frac{3+2i}{2-i}} \qquad \frac{4}{13} - \frac{7}{13}i$$

$$13. \quad \frac{1+2i}{2-i} - \frac{2-i}{1+2i} \qquad 2i$$

$$14. \quad (3-2i)^2 \qquad 5-12i$$

$$15. \quad (3-2i)^2 \cdot i \qquad 12+5i$$

$$16. \quad \frac{(3-2i)^2}{1+2i} \qquad -\frac{19}{5} - \frac{22}{5}i$$

$$17. \quad (3+2i)(2-i) - (-1-i)^2 \qquad 8-i$$

$$18. \quad \frac{1}{5}(3+2i)^2 + \frac{3+2i}{2-i} \qquad \frac{9}{5} + \frac{19}{5}i$$

1.3 Prepis komplexného čísla v algebraickom tvare do iného tvaru

Niekedy je výhodnejšie pracovať s komplexnými číslami v goniometrickom alebo exponenciálnom tvare.

Pri prepise komplexného čísla $z = x + yi$ z algebraického do goniometrického, resp. exponenciálneho tvaru, je potrebné vypočítať modul $|z|$ a amplitúdu φ komplexného čísla.

Platí:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \cos \varphi = \frac{x}{|z|} \wedge \sin \varphi = \frac{y}{|z|}.$$

Príklad 5 Prepíšme komplexné číslo $z = -1 + \sqrt{3}i$ do goniometrického a exponenciálneho tvaru.

Riešenie: Modul komplexného čísla je $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = 2$.

Pre jeho amplitúdu φ platí $\cos \varphi = \frac{x}{|z|} = -\frac{1}{2} \wedge \sin \varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Obe tieto podmienky platia súčasne pre uhol (amplitúdu) $\varphi = \frac{2}{3}\pi$.

Goniometrický tvar komplexného čísla je $z = |z|(\cos \varphi + i \cdot \sin \varphi)$, preto môžeme písať

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{2}{3}\pi\right).$$

Exponenciálny tvar komplexného čísla je $z = |z|e^{i\varphi}$, môžeme písať

$$z = -1 + \sqrt{3}i = 2e^{i\frac{2}{3}\pi}.$$

Neriešené úlohy

V úlohách 19 – 32 napíšte komplexné číslo v goniometrickom aj exponenciálnom tvare:

- | | | |
|-----|---|--|
| 19. | $z = 1$ | $z = \cos 0 + i \cdot \sin 0 = e^{0i}$ |
| 20. | $z = -1$ | $z = \cos \pi + i \cdot \sin \pi = e^{\pi i}$ |
| 21. | $z = i$ | $z = \cos \frac{\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\pi}{2} = e^{\frac{\pi}{2}i}$ |
| 22. | $z = -i$ | $z = \cos \frac{3}{2}\pi + i \cdot \sin \frac{3}{2}\pi = e^{\frac{3}{2}\pi i}$ |
| 23. | $z = 1 + i$ | $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ |
| 24. | $z = -2\sqrt{2} - 2\sqrt{2}i$ | $z = 4\left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{4}\right) = 4e^{\frac{5\pi}{4}i}$ |
| 25. | $z = -\frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i$ | $z = \sqrt{3}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4}\right) = \sqrt{3}e^{\frac{3\pi}{4}i}$ |
| 26. | $z = \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ | $z = \sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{6}i}$ |
| 27. | $z = -\sqrt{3} + i$ | $z = 2\left(\cos \frac{5}{6}\pi + i \cdot \sin \frac{5}{6}\pi\right) = 2e^{\frac{5}{6}\pi i}$ |
| 28. | $z = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ | $z = \sqrt{3}\left(\cos \frac{11\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{11\pi}{6}\right) = \sqrt{3}e^{\frac{11}{6}\pi i}$ |
| 29. | $z = 1 + \sqrt{3}i$ | $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = 2e^{\frac{\pi}{3}i}$ |
| 30. | $z = \frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i$ | $z = 3\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3}\right) = 3e^{\frac{\pi}{3}i}$ |
| 31. | $z = -2 - 2\sqrt{3}i$ | $z = 4\left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{4\pi}{3}\right) = 4e^{\frac{4}{3}\pi i}$ |

$$32. \quad z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{3} = e^{\frac{5}{3}\pi i}$$

1.4 Operácie s komplexnými číslami v goniometrickom tvare

Súčin komplexných čísel

Ak komplexné čísla v goniometrickom tvare násobíme, vynásobíme ich moduly a amplitúdy spočítame. Výsledok môžeme previesť do algebraického tvaru.

$$\text{Nech } \begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 &= |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \cdot |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_1||z_2|[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)].$$

Príklad 6 Nech $z_1 = 4(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$. Vypočítajme $z_1 \cdot z_2$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [4(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})] \cdot [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})] = 4\sqrt{2}[\cos(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4})] = \\ &= 4\sqrt{2}[\cos \frac{6\pi}{4} + i \sin \frac{6\pi}{4}] = 4\sqrt{2}[\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}] = 4\sqrt{2}(0 - i) = -4\sqrt{2}i. \end{aligned}$$

Podiel komplexných čísel

Ak komplexné čísla v goniometrickom tvare delíme, vydělíme ich moduly a amplitúdy odčítame. Výsledok môžeme previesť do algebraického tvaru.

$$\text{Nech } \begin{aligned} z_1 &= |z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) \\ z_2 &= |z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)}{|z_2|(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)} = \frac{|z_1|}{|z_2|}[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)].$$

Príklad 7 Nech $z_1 = 4(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$, $z_2 = \sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$. Vypočítajme $\frac{z_1}{z_2}$.

Riešenie:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{4(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})}{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})} = \frac{4}{\sqrt{2}}[\cos(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) + i \sin(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4})] = \frac{4}{\sqrt{2}}(\cos \frac{4\pi}{4} + i \sin \frac{4\pi}{4}) = \\ &= 2\sqrt{2}(\cos \pi + i \sin \pi) = 2\sqrt{2}(-1 + 0i) = -2\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Umocňovanie komplexných čísel

Pri umocňovaní komplexných čísel v goniometrickom tvare využijeme Moivreovu vetu (vzťah). Modul komplexného čísla umocníme a amplitúdu vynásobíme príslušnou mocninou. Výsledok môžeme previesť do algebraického tvaru.

Nech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ potom $z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$ (Moivreova veta).

Príklad 8 Vypočítajme $(-1 + \sqrt{3}i)^{13}$.

Riešenie: Pri umocňovaní komplexných čísel využijeme vzťah

$$z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi).$$

Preto je potrebné komplexné číslo, ktoré ideme umocňovať, prepísať do goniometrického tvaru. Využijeme pritom výsledok z Príkladu 5.

$$z = -1 + \sqrt{3} \cdot i = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z^n = |z|^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) = 2^{13} \left(\cos 13 \cdot \frac{2}{3}\pi + i \sin 13 \cdot \frac{2}{3}\pi\right) = 2^{13} \left(\cos \frac{26}{3}\pi + i \sin \frac{26}{3}\pi\right) =$$

$$= 2^{13} \left(-\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2^{12} (-1 + i \cdot \sqrt{3}).$$

Odmocňovanie komplexných čísel

Pri odmocňovaní komplexných čísel v goniometrickom tvare odmocníme modul komplexného čísla a amplitúdu „predelíme“ príslušnou odmocninou. Výsledok môžeme previesť do algebraického tvaru.

Nech $z = |z|(\cos \varphi + i \sin \varphi)$ potom pri n -tej odmocnine dostaneme n výsledkov v tvare

$$a_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{kde } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Príklad 9 Vypočítajme $\sqrt{-1 + \sqrt{3} \cdot i}$.

Riešenie: Pri odmocňovaní komplexných čísel využijeme vzťah

$$a_k = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right), \quad \text{kde } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Znova je potrebné prepísať odmocňované komplexné číslo do goniometrického tvaru, pričom použijeme výsledok z Príkladu 5, čiže $z = -1 + \sqrt{3} \cdot i = 2\left(\cos \frac{2}{3}\pi + i \sin \frac{2}{3}\pi\right)$.

Keďže počítame druhú odmocninu, dostaneme dva výsledky v tvare:

$$a_k = \sqrt{|z|} \left[\cos \frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi}{2} \right], \quad \text{kde } k = 0, 1.$$

Prvý výsledok pre $k = 0$ je

$$a_0 = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{2} \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{\pi}{3} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Druhý výsledok pre $k = 1$ je

$$a_1 = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} + i \cdot \sin \frac{\frac{2}{3}\pi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{2} \right] = \sqrt{2} \left(\cos \frac{4}{3}\pi + i \cdot \sin \frac{4}{3}\pi \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{1}{2} - i \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

Neriešené úlohy

V úlohách 33 – 43 vypočítajte:

$$33. \quad [2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})] \cdot [3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})] \qquad 6(\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6})$$

$$34. \quad [4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})] \cdot [\frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})] \qquad 2(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6})$$

$$35. \quad (\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \cdot [\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})] \qquad \sqrt{2}(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4})$$

$$36. \quad \frac{2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})}{3(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})} \qquad \frac{2}{3}(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2})$$

$$37. \quad \frac{4(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})}{\frac{1}{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})} \qquad 8(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$$

$$38. \quad \frac{\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}}{\sqrt{2}(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$$

$$39. \quad [2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})]^5 \qquad 32(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$$

$$\begin{array}{ll}
 40. & (\cos \frac{3\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{3\pi}{4})^{10} \qquad \cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2} \\
 41. & [3(\cos \frac{5\pi}{6} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{6})]^{13} \qquad 3^{13} (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) \\
 42. & \sqrt{2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \cdot \sin \frac{5\pi}{3})} \qquad a_0 = \sqrt{2} (\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6}) \\
 & \qquad \qquad \qquad a_1 = \sqrt{2} (\cos \frac{11\pi}{6} + i \sin \frac{11\pi}{6}) \\
 43. & \sqrt[3]{8(\cos \frac{\pi}{4} + i \cdot \sin \frac{\pi}{4})} \qquad a_0 = 2(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12}) \\
 & \qquad \qquad \qquad a_1 = 2(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}) \\
 & \qquad \qquad \qquad a_2 = 2(\cos \frac{17\pi}{12} + i \sin \frac{17\pi}{12})
 \end{array}$$

1.5 Operácie s komplexnými číslami v exponenciálnom tvare

Operácie s komplexnými číslami v exponenciálnom tvare majú rovnaké pravidlá ako operácie v goniometrickom tvare.

Súčin komplexných čísel

Ak komplexné čísla v exponenciálnom tvare násobíme, vynásobíme ich moduly a amplitúdy spočítame.

$$\begin{array}{l}
 \text{Nech } z_1 = |z_1| e^{i \cdot \varphi_1} \\
 z_2 = |z_2| e^{i \cdot \varphi_2}
 \end{array}$$

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{i \cdot \varphi_1} \cdot |z_2| e^{i \cdot \varphi_2} = |z_1| |z_2| e^{i \cdot (\varphi_1 + \varphi_2)}.$$

Príklad 1 Nech $z_1 = 4e^{\frac{5}{4}\pi i}$ $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}$. Vypočítajme $z_1 \cdot z_2$.

Riešenie:

$$z_1 \cdot z_2 = 4e^{\frac{5}{4}\pi i} \cdot \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i} = 4\sqrt{2}e^{(\frac{5\pi}{4} + \frac{\pi}{4})i} = 4\sqrt{2}e^{\frac{6\pi}{4}i} = 4\sqrt{2}e^{\frac{3\pi}{2}i}.$$

Podiel komplexných čísel

Ak komplexné čísla v exponenciálnom tvare delíme, vydáme ich moduly a amplitúdy odčítame.

$$\text{Nech } \begin{aligned} z_1 &= |z_1| e^{i\varphi_1} \\ z_2 &= |z_2| e^{i\varphi_2} \end{aligned}.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{i\varphi_1}}{|z_2| e^{i\varphi_2}} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{(\varphi_1 - \varphi_2)i}.$$

Príklad 2 Nech $z_1 = 4e^{\frac{5}{4}\pi i}$ $z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}$. Vypočítajte $\frac{z_1}{z_2}$.

Riešenie:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{4e^{\frac{5}{4}\pi i}}{\sqrt{2}e^{\frac{1}{4}\pi i}} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{(\frac{5\pi}{4} - \frac{\pi}{4})i} = \frac{4}{\sqrt{2}} e^{\frac{4\pi}{4}i} = 2\sqrt{2}e^{\pi i}.$$

Umocňovanie komplexných čísel

Pri umocňovaní komplexných čísel v exponenciálnom tvare modul komplexného čísla umocníme a amplitúdu vynásobíme príslušnou mocninou.

Nech $z = |z|e^{i\varphi}$ potom $z^n = |z|^n e^{in\varphi i}$.

Príklad 3 Nech $z = 2e^{\frac{2}{3}\pi i}$. Vypočítajte z^{13} .

Riešenie: $z^{13} = [2e^{\frac{2}{3}\pi i}]^{13} = 2^{13} e^{\frac{26}{3}\pi i}.$

Odmocňovanie komplexných čísel

Pri odmocňovaní komplexných čísel v exponenciálnom tvare odmocníme modul komplexného čísla a amplitúdu „predelíme“ príslušnou odmocninou.

Nech $z = |z|e^{i\varphi}$ potom pri n -tej odmocnine dostaneme n výsledkov v tvare $a_k = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}i}$,
kde $k = 0, 1, \dots, n-1$.

Príklad 4 Vypočítajte $\sqrt{2e^{\frac{2}{3}\pi i}}$.

Riešenie: Pri odmocňovaní komplexných čísel využijeme vzťah

$$a_k = \sqrt[n]{|z|} e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}i}, \quad \text{kde } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Keďže počítame druhú odmocninu, dostaneme dva výsledky v tvare:

$$a_k = \sqrt{|z|} e^{\frac{2}{3}\pi + 2k\pi \over 2} i, \quad \text{kde } k = 0, 1.$$

Prvý výsledok pre $k = 0$ je $a_0 = \sqrt{2} e^{\frac{\pi}{3} i}$.

Druhý výsledok pre $k = 1$ je $a_1 = \sqrt{2} e^{\frac{4}{3}\pi i}$.

Neriešené úlohy

V úlohách 44– 54 vypočítajte:

$$44. \quad 2e^{\frac{5\pi}{3}i} \cdot 3e^{\frac{\pi}{6}i} \qquad 6e^{\frac{11\pi}{6}i}$$

$$45. \quad 4e^{\frac{2\pi}{3}i} \cdot \frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i} \qquad 2e^{\frac{7\pi}{6}i}$$

$$46. \quad e^{\frac{3\pi}{4}i} \cdot \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i} \qquad \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{4}i}$$

$$47. \quad \frac{2e^{\frac{5\pi}{3}i}}{3e^{\frac{\pi}{6}i}} \qquad \frac{2}{3}e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$48. \quad \frac{4e^{\frac{2\pi}{3}i}}{\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}i}} \qquad 8e^{\frac{\pi}{6}i}$$

$$49. \quad \frac{e^{\frac{3\pi}{4}i}}{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{2}i}} \qquad \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$$

$$50. \quad \left[2e^{\frac{5\pi}{3}i} \right]^5 \qquad 32e^{\frac{\pi}{3}i}$$

$$51. \quad \left[e^{\frac{3\pi}{4}i} \right]^{10} \qquad e^{\frac{3\pi}{2}i}$$

$$52. \quad \left[3e^{\frac{5\pi}{6}i} \right]^{13} \qquad 3^{13} e^{\frac{5\pi}{6}i}$$

$$53. \quad \sqrt{2e^{\frac{5\pi}{3}i}} \qquad a_0 = \sqrt{2}e^{\frac{5\pi}{6}i} \\ a_1 = \sqrt{2}e^{\frac{11\pi}{6}i}$$

$$54. \quad \sqrt[3]{8e^{\frac{\pi}{4}i}} \qquad a_0 = 2e^{\frac{\pi}{12}i} \\ a_1 = 2e^{\frac{3\pi}{4}i} \\ a_2 = 2e^{\frac{17\pi}{12}i}$$

V úlohách 55 – 67 vypočítajte príslušnú mocninu:

$$55. \quad (1+i)^5 \qquad -4-4i$$

$$56. \quad (-2\sqrt{2}-2\sqrt{2}i)^3 \qquad 32\sqrt{2}-32\sqrt{2}i$$

$$57. \quad \left(-\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i\right)^4 \qquad -9$$

$$58. \quad \left(\frac{\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^7 \qquad -4\sqrt{6}-4\sqrt{2}i$$

$$59. \quad (-\sqrt{3}+i)^4 \qquad -8-8\sqrt{3}i$$

$$60. \quad \left(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^3 \qquad -3\sqrt{3}i$$

$$61. \quad (1+\sqrt{3}i)^5 \qquad 16-16\sqrt{3}i$$

$$62. \quad \left(\frac{3}{2}+\frac{3\sqrt{3}}{2}i\right)^8 \qquad -\frac{6561}{2}+\frac{6561}{2}\sqrt{3}i$$

$$63. \quad (-2-2\sqrt{3}i)^6 \qquad 4096$$

$$64. \quad \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^4 \qquad -\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$65. \quad (\sqrt{3}-i)^6 \qquad -64$$

$$66. \quad (1 + \sqrt{3}i)^4 \qquad -8 - 8\sqrt{3}i$$

$$67. \quad (-1 - \sqrt{3}i)^5 \qquad -16 + 16\sqrt{3}i$$

V úlohách 68 – 80 vypočítajte odmocninu z komplexného čísla:

$$68. \quad \sqrt{-1} \qquad \begin{aligned} a_0 &= i \\ a_1 &= -i \end{aligned}$$

$$69. \quad \sqrt{i} \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ a_1 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

$$70. \quad \sqrt{-i} \qquad \begin{aligned} a_0 &= -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ a_1 &= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

$$71. \quad \sqrt{1 + \sqrt{3}i} \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \\ a_1 &= -\frac{\sqrt{6}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i \end{aligned}$$

$$72. \quad \sqrt{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i} \qquad \begin{aligned} a_0 &= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \\ a_1 &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i \end{aligned}$$

$$73. \quad \sqrt{\frac{3}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{2}i} \qquad \begin{aligned} a_0 &= \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \\ a_1 &= -\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \end{aligned}$$

$$74. \quad \sqrt{-2 - 2\sqrt{3}i} \qquad \begin{aligned} a_0 &= -1 + \sqrt{3}i \\ a_1 &= 1 - \sqrt{3}i \end{aligned}$$

$$75. \quad \sqrt{-8 + 8\sqrt{3}i} \qquad \begin{aligned} a_0 &= 2 + 2\sqrt{3}i \\ a_1 &= -2 - 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

76. $\sqrt[3]{1}$

$$a_0 = 1$$

$$a_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$a_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

77. $\sqrt[3]{-1}$

$$a_0 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$a_1 = -1$$

$$a_2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

78. $\sqrt[3]{i}$

$$a_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$a_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$a_2 = -i$$

79. $\sqrt[4]{-1}$

$$a_0 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$a_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$a_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$a_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

80. $\sqrt[4]{-8 - 8\sqrt{3}i}$

$$a_0 = 1 + \sqrt{3}i$$

$$a_1 = -\sqrt{3} + i$$

$$a_2 = -1 - \sqrt{3}i$$

$$a_3 = \sqrt{3} - i$$

2 MATICE

2.1 Operácie s maticami

Súčet matíc

Súčet matíc existuje len pre rovnaké typy matíc (ak $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, aj matica $\mathbf{B}$ musí byť typu $m \times n$). Matice sa sčítavajú po zložkách.

Pre prvky matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ platí $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Príklad 1 Vypočítajme $\mathbf{A} + \mathbf{B}$, ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+1 & -1+2 & 3-1 \\ 2+0 & 1+3 & 5+0 \\ -2+2 & 3+1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rozdiel matíc

Rozdiel matíc existuje len pre rovnaké typy matíc (ak $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, aj matica $\mathbf{B}$ musí byť typu $m \times n$). Matice sa odčítavajú po zložkách.

Pre prvky matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} - \mathbf{B}$ platí $c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$.

Príklad 2 Vypočítajme $\mathbf{A} - \mathbf{B}$, ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0-1 & -1-2 & 3-(-1) \\ 2-0 & 1-3 & 5-0 \\ -2-2 & 3-1 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 5 \\ -4 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

k -násobok matíc

Pri násobení matice číslom $k \in \mathbf{R}$ násobíme každý prvok matice číslom $k \in \mathbf{R}$.

Pre maticu $\mathbf{C} = k \cdot \mathbf{A}$, kde $k \in \mathbf{R}$ platí $c_{ij} = k \cdot a_{ij}$.

Príklad 3 Vypočítajme $2 \cdot \mathbf{A}$, ak $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Riešenie:

$$2 \cdot \mathbf{A} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 0 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot (-2) & 2 \cdot 3 & 2 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 4 & 2 & 10 \\ -4 & 6 & -2 \end{pmatrix}.$$

Súčin matic

Súčin matic $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ je možné vypočítať, ak počet stĺpcov matice $\mathbf{A}$ je rovnaký ako počet riadkov matice $\mathbf{B}$ (ak $\mathbf{A}$ je matica typu $m \times n$, matica $\mathbf{B}$ musí byť typu $n \times r$ a výsledná matica $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ bude typu $m \times r$).

Prvky matice $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ vypočítame pomocou skalárnych súčinov dvoch vektorov. Prvý vektor je príslušný riadok prvej matice a druhý vektor je príslušný stĺpec druhej matice (prvok c_{ij} výslednej matice vznikne ako skalárny súčin i -teho riadku matice $\mathbf{A}$ a j -teho stĺpca matice $\mathbf{B}$).

Násobenie dvoch matic ukážeme v nasledujúcom príklade.

Príklad 4 Vypočítajme $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$, ak

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Riešenie:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 \cdot 1 - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 & 0 \cdot 2 - 1 \cdot 3 + 3 \cdot 1 & 0 \cdot (-1) - 1 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \\ 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 & 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 5 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 + 5 \cdot 2 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 & -2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 - 1 \cdot 1 & -2 \cdot (-1) + 3 \cdot 0 - 1 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 12 & 12 & 8 \\ -4 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \\ \mathbf{B} \cdot \mathbf{C} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-4) \\ 0 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot (-4) \\ 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Poznámka: $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2$, $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^3, \dots$

2.2 Hodnosť matice

Hodnosť matice $h(\mathbf{A})$ je počet lineárne nezávislých riadkov matice.

Hodnosť matice $h(\mathbf{A})$ môžeme nájsť ako počet nenulových riadkov matice upravenej na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.

Příklad 5 Nájďme hodnotu matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix}$.

Riešenie: Maticu budeme pomocou ekvivalentných úprav upravovať na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & -1 & 5 & 8 \\ 4 & 7 & 11 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{+4R_1} \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 40 & -2 & 4 \\ 9 & -1 & 5 & 8 \\ 0 & 43 & 7 & 6 \end{pmatrix} \xrightarrow{-2R_2} \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 40 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \sim$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 20 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 43 & 7 & 6 \end{pmatrix} \cdot 43 \sim \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 860 & -43 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -860 & -140 & -120 \end{pmatrix} \xrightarrow{+R_2} \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 860 & -43 & 86 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -183 & -34 \end{pmatrix} \xrightarrow{\downarrow \sim} \begin{pmatrix} -1 & 9 & -1 & 0 \\ 0 & 860 & -43 & 86 \\ 0 & 0 & -183 & -34 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\uparrow \sim}$$

Počet nenulových riadkov matice je 3, teda hodnosť matice $\mathbf{A}$ je $h(\mathbf{A}) = 3$.

Neriešené úlohy

Sú dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Vypočítajte:

Výsledky:

1. $3 \cdot \mathbf{A} - 2 \cdot \mathbf{B}$ $\begin{pmatrix} 0 & -9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$
2. $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ $\begin{pmatrix} 9 & -6 \\ -1 & 8 \end{pmatrix}$
3. $\mathbf{A}^2 + \mathbf{B}$ $\begin{pmatrix} 4 & -18 \\ 5 & 15 \end{pmatrix}$

Sú dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$. Vypočítajte:

$$4. \quad (\mathbf{A} - \mathbf{B}) \cdot (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \quad \begin{pmatrix} -1 & 6 & -19 \\ 1 & 7 & -20 \\ 2 & -25 & 12 \end{pmatrix}$$

Sú dané matice $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$, $\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Vypočítajte:

Výsledky:

$$5. \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \quad \begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 3 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$6. \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \quad \begin{pmatrix} 14 & 22 \\ 22 & 50 \end{pmatrix}$$

$$7. \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{A} \quad \begin{pmatrix} 20 & 18 & 22 \\ 18 & 18 & 18 \\ 22 & 18 & 26 \end{pmatrix}$$

$$8. \quad \mathbf{B} \cdot \mathbf{E} \quad \begin{pmatrix} 4 & 14 \\ 14 & 16 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}$$

$$9. \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{D} \quad \begin{pmatrix} 14 & 12 & 22 \\ 19 & 12 & 47 \end{pmatrix}$$

$$10. \quad \mathbf{C} \cdot \mathbf{F} \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 22 & -8 \end{pmatrix}$$

$$11. \quad \mathbf{F} \cdot \mathbf{C} \quad \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$$

$$12. \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{C} \quad \begin{pmatrix} 8 & 40 \\ 9 & 36 \\ 7 & 44 \end{pmatrix}$$

$$13. \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} \quad \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -3 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$

$$14. \quad 3 \cdot \mathbf{C} - 2\mathbf{F} \quad \begin{pmatrix} 10 & 12 \\ -3 & 26 \end{pmatrix}$$

$$15. \quad -2\mathbf{A} + 5\mathbf{D} \quad \begin{pmatrix} 11 & 14 & -7 \\ 2 & -1 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} 16. & \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{D} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 1 & 13 & 14 \end{pmatrix} \\ 17. & \mathbf{C} + \mathbf{F} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{E} \qquad \begin{pmatrix} 14 & 26 \\ 26 & 57 \end{pmatrix} \\ 18. & (\mathbf{F} \cdot \mathbf{C} - 3 \cdot \mathbf{C})^T \qquad \begin{pmatrix} -10 & 2 \\ -20 & -20 \end{pmatrix} \end{array}$$

V úlohách 19 – 29 vypočítajte hodnotu matice:

$$19. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 3$$

$$20. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 8 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 2$$

$$21. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 27 & 26 & 25 \\ 19 & 18 & 17 \\ 12 & 11 & 10 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 2$$

$$22. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 2$$

$$23. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 3$$

$$24. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 18 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 3$$

$$25. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 3$$

$$26. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & -3 \\ 7 & 1 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 7 & 9 \end{pmatrix} \qquad h(\mathbf{A}) = 3$$

$$27. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad h(\mathbf{A}) = 2$$

$$28. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad h(\mathbf{A}) = 4$$

$$29. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 & -5 & 3 \\ 8 & 4 & 6 & -7 & 2 \\ 4 & 2 & 3 & -8 & 7 \\ 4 & 2 & 3 & 1 & -5 \\ 8 & 4 & 6 & -1 & -6 \end{pmatrix} \quad h(\mathbf{A}) = 2$$

3 DETERMINANTY

3.1 Výpočet determinantu rozmeru 2x2

Determinant rozmeru 2×2 sa vypočíta tak, že od súčinu prvkov na hlavnej diagonále sa odpočíta súčin prvkov na vedľajšej diagonále.

Príklad 1 Vypočítajte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$.

Riešenie: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7.$

3.2 Výpočet determinantu rozmeru 3x3

Determinant rozmeru 3×3 môžeme riešiť pomocou Sarusovho pravidla. Pod tretí riadok opíšeme prvé dva riadky. Vypočítame súčin prvkov na hlavnej diagonále a súčiny prvkov na jej rovnobežkách. Získané súčiny spočítame (s_1). Rovnako vypočítame súčin prvkov na vedľajšej diagonále a súčiny prvkov na jej rovnobežkách a opäť získané súčiny spočítame (s_2). Výsledná hodnota determinantu je rozdiel získaných súčtov ($s_1 - s_2$).

Príklad 2 Vypočítajte determinant $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Riešenie:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [2 \cdot 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 \cdot 3 + 1 \cdot 1 \cdot 0] - [3 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot (-1)] = -8.$$

3.3 Výpočet determinantu rozmeru 4x4 a vyššieho rozmeru

Determinanty rozmerov 4×4 a väčších, sa počítajú pomocou rozvoja determinantu podľa riadka alebo stĺpca.

$$|\mathbf{A}| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in}, \text{ resp. } |\mathbf{A}| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj},$$

kde $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je algebrický doplnok a D_{ij} je subdeterminant prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ (vznikne zakrytím i -teho riadku a j -teho stĺpca matice $\mathbf{A}$).

Príklad 3

Vypočítajte determinant

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

Riešenie: Pred samotným výpočtom je výhodné determinant upraviť pomocou ekvivalentných úprav tak, aby sme vytvorili ľubovoľný riadok, resp. stĺpec obsahujúci čo najviac núl. Vytvorený riadok, resp. stĺpec použijeme k rozvoju determinantu.

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2R_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 3 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{-2R_2} \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -3 & -2 \\ 0 & -10 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} -3 & -4 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ -3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -18.$$

Neriešené úlohy

V úlohách 1 – 28 vypočítajte determinant matice:

Výsledky:

1. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & -5 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = -23$$

2. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 6 & 30 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = 12$$

3. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 15 & 10 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = 0$$

4. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = 0$$

5. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 4 & -5 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = -8$$

6. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 7 & 3 \\ 3 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = -76$$

7. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -2 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$|\mathbf{A}| = -35$$

$$8. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -35$$

$$9. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 9 & 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -70$$

$$10. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 9 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -175$$

$$11. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 12$$

$$12. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 12 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 24$$

$$13. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 12 & 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 36$$

$$14. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 12 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 60$$

$$15. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -4$$

$$16. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -6$$

$$17. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 1$$

$$18. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 3 & -4 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 900$$

$$19. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 6$$

$$20. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -5$$

$$21. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 18$$

$$22. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 14$$

$$23. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 & 4 \\ 10 & 2 & -2 & 10 \\ -5 & 6 & 8 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -570$$

$$24. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 12$$

$$25. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & -5 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -48$$

$$26. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 1 \\ -2 & 6 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = 223$$

$$27. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & 16 \\ 2 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -24$$

$$28. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 0 & 4 & 4 \\ -4 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \quad |\mathbf{A}| = -24$$

3.4 Inverzná matica

Inverznú maticu k matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ budeme hľadať využitím adjungovanej matice $\text{adj } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$ pomocou vzťahu $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$, kde $A_{ij} = (-1)^{i+j} D_{ij}$ je algebrický doplnok a D_{ij} je subdeterminant prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ (vznikne zakrytím i -teho riadku a j -teho stĺpca matice $\mathbf{A}$), za predpokladu, že determinant matice $|\mathbf{A}| \neq 0$.

Príklad 4 K matici $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ nájdime inverznú maticu.

Riešenie: Vypočítame determinant matice $\mathbf{A}$ a všetky algebrické doplnky tvoriace adjungovanú maticu.

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 13$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -2$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7$$

Inverzná matica k matici $\mathbf{A}$ je $\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -6 & -4 & 13 \\ 4 & 0 & -2 \\ 2 & 4 & -7 \end{pmatrix}$.

Neriešené úlohy

V úlohách 29 – 47 nájdite inverznú maticu k matici $\mathbf{A}$:

Výsledky:

29. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

30. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & -2 \end{pmatrix}$$

31. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$$

32. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 5 & 9 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$$

33. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$

neexistuje

34. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$$

35. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

36. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

37. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

38. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$39. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}$$

$$40. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{63} \begin{pmatrix} 14 & -7 & 7 \\ 8 & 14 & -5 \\ -5 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$41. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & -2 \\ 7 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{49} \begin{pmatrix} -11 & -1 & 9 \\ -17 & -6 & 5 \\ 26 & -11 & 1 \end{pmatrix}$$

$$42. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$43. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & 17 & 8 \\ 18 & 34 & 17 \\ 10 & 19 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 51 & -16 & -17 \\ -26 & 8 & 9 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$44. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$45. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ -5 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 7 \\ 2 & -10 & -18 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$46. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$47. \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 7 & 5 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 11 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & -5 & 4 \\ -7 & 3 & 16 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & -11 & 9 \end{pmatrix}$$

4 SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

4.1 Gaussova eliminačná metóda

Sústavu rovníc prepíšeme do maticového tvaru. Rozšírenú maticu sústavy upravíme na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar. Výpočet neznámych následne urobíme postupne, počnúc od nenulového riadku upravenej matice s najväčším počtom núl s pokračovaním postupne s riadkami s menším počtom núl. Využívame pritom Frobeniovu vetu.

Frobeniova veta: Sústava

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

má riešenie práve vtedy, ak $h(\mathbf{A}) = h(\bar{\mathbf{A}})$, kde $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$ je matica sústavy,

$\bar{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$ je rozšírená matica sústavy.

V tom prípade

- Ak $h(\mathbf{A}) = h(\bar{\mathbf{A}}) = n$, tak daná sústava má **práve jedno riešenie**,
- Ak $h(\mathbf{A}) = h(\bar{\mathbf{A}}) < n$, tak daná sústava má **nekonečne veľa riešení**.

Poznámka: Ak $h(\mathbf{A}) \neq h(\bar{\mathbf{A}})$, tak daná sústava **nemá riešenie**.

Príklad 1	<i>Riešme sústavu rovníc</i>	$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11$
		$2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + x_4 = 12$
		$3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 13$
		$4x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14$

Riešenie: Maticu upravíme na trojuholníkový, resp. lichobežníkový tvar.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 11 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & | & 12 \\ 3 & 4 & 1 & 2 & | & 13 \\ 4 & 1 & 2 & 3 & | & 14 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2R_1 \\ -3R_1 \\ -4R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & | & -10 \\ 0 & -2 & -8 & -10 & | & -20 \\ 0 & -7 & -10 & -13 & | & -30 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_2 \\ -7R_2 \end{matrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & | & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 36 & | & 40 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ +R_3 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & | & 11 \\ 0 & -1 & -2 & -7 & | & -10 \\ 0 & 0 & -4 & 4 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 40 & | & 40 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice je rovná 4 a hodnosť rozšírenej matice je takisto rovná 4 a je to zároveň aj počet neznámych. Na základe Frobeniovej vety má sústava práve jedno riešenie, ktoré sa dá jednoducho vyjadriť z upravenej matice.

Z posledného riadku upravenej matice je zřejmé, že

$$40x_4 = 40$$

$$\underline{\underline{x_4 = 1}}$$

Z tretieho riadku upravenej matice vypočítame

$$-4x_3 + 4x_4 = 0$$

$$-4x_3 + 4 \cdot 1 = 0$$

$$\underline{\underline{x_3 = 1}}$$

Pomocou druhého riadku nájdeme

$$-x_2 - 2x_3 - 7x_4 = -10$$

$$-x_2 - 2 \cdot 1 - 7 \cdot 1 = -10$$

$$\underline{\underline{x_2 = 1}}$$

Pomocou prvého riadku nájdeme

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 11$$

$$x_1 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 4 \cdot 1 = 11$$

$$\underline{\underline{x_1 = 2}}$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (2, 1, 1, 1)^T$.

	x_1	$-2x_2$	$+3x_3$	$-4x_4$	$=$	4
		x_2	$-x_3$	$+x_4$	$=$	-3
Příklad 2	x_1	$+3x_2$		$-3x_4$	$=$	2
		$-7x_2$	$+3x_3$	$+x_4$	$=$	-3

Riešme sústavu rovníc

Riešenie: Postupujeme podobne ako v predchádzajúcej úlohe.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & | & 2 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & | & -2 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5R_2 + 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 13 \\ 0 & 0 & -4 & 8 & | & -24 \end{pmatrix} \xrightarrow{+2R_3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 2 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice je rovná 3 a hodnosť rozšírenej matice je rovná 4. Na základe Frobeniovej vety sústava nemá riešenie.

Príklad 3 Riešme sústavu rovníc

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = & 4 \\ & x_2 & -x_3 & +x_4 & = & -3 \\ x_1 & +3x_2 & & -3x_4 & = & 1 \\ & -7x_2 & +3x_3 & +x_4 & = & -3 \end{array}.$$

Riešenie: Postupujeme podobne ako v predchádzajúcich úlohách.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & | & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-R_1} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 5 & -3 & 1 & | & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & | & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{-5R_2 + 7R_2} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & | & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -4 & | & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Hodnosť matice je rovná 3 a hodnosť rozšírenej matice je takisto rovná 3, ale počet neznámych je rovný 4. Na základe Frobeniovej vety má sústava nekonečne veľa riešení.

Tretí riadok upravenej matice obsahuje 2 neznáme, jednu z neznámych si zvolíme ako parameter $t \in \mathbf{R}$.

$$\underline{x_4 = t}.$$

Ďalšiu neznámu potom vyjadríme pomocou parametra

$$\begin{aligned} 2x_3 - 4x_4 &= 12 \\ 2x_3 - 4t &= 12 \\ \underline{x_3} &= 6 + 2t \end{aligned}.$$

Z druhého riadku

$$\begin{aligned}x_2 - x_3 + x_4 &= -3 \\x_2 - (6 + 2t) + t &= -3 \\ \underline{\underline{x_2 = 3 + t}}\end{aligned}$$

Z prvého riadku

$$\begin{aligned}x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= 4 \\x_1 - 2(3 + t) + 3(6 + 2t) - 4t &= 4 \\ \underline{\underline{x_1 = -8}}\end{aligned}$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3, x_4)^T = (-8, 3 + t, 6 + 2t, t)^T, t \in \mathbf{R}$.

Neriešené úlohy

V úlohách 1 – 34 riešte sústavy lineárnych rovníc Gaussovou eliminačnou metódou:

Výsledky:

- | | | |
|----|--|---|
| 1. | $\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1\end{aligned}$ | $(1, 3, 2)^T$ |
| 2. | $\begin{aligned}3x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 1 \\4x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 5 \\3x_1 + 5x_2 + x_3 &= 1\end{aligned}$ | $(2, -1, 0)^T$ |
| 3. | $\begin{aligned}2x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 3 \\4x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= 4 \\2x_1 + 3x_3 &= 2\end{aligned}$ | $\emptyset$ |
| 4. | $\begin{aligned}x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 3 \\3x_1 + 2x_2 + x_3 &= 7\end{aligned}$ | $(3 + t, -1 - 2t, t)^T, t \in \mathbf{R}$ |
| 5. | $\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 3 \\2x_1 + 4x_2 + x_3 &= 12 \\x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 4 \\3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 &= -1\end{aligned}$ | $(3, 2, -2, -1)^T$ |

-
6.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 + 4x_3 + x_4 &= 20 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 11 \\ 2x_1 + 10x_2 + 9x_3 + 7x_4 &= 40 \\ 3x_1 + 8x_2 + 9x_3 + 2x_4 &= 37 \end{aligned} \quad (1, 2, 2, 0)^T$$
7.
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned} \quad (-2, 0, 1, -1)^T$$
8.
$$\begin{aligned} 7x_1 + 9x_2 + 4x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 &= 6 \\ 5x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned} \quad \left(-\frac{2}{5}, -\frac{6}{5}, \frac{17}{5}, 1\right)^T$$
9.
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 6x_1 + 8x_2 + x_3 + 5x_4 &= -8 \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= -8 \end{aligned} \quad (2, -2, 1, -1)^T$$
10.
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned} \quad (1, 2, 1, 3)^T$$
11.
$$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 &= 11 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -7 \end{aligned} \quad (3, 0, -5, 11)^T$$
12.
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \end{aligned} \quad \left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)^T$$

-
- | | | |
|-----|---|--|
| 13. | $\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +x_4 & = 2 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +x_4 & = 2 \\ 4x_1 & & +7x_3 & +2x_4 & = 2 \\ -6x_1 & +x_2 & +3x_3 & -4x_4 & = -1 \end{array}$ | $\left(\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0, -\frac{5}{3}\right)^T$ |
| 14. | $\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +3x_4 & = 4 \\ 2x_1 & +x_2 & & -2x_4 & = 3 \\ -3x_1 & +3x_2 & +x_3 & +x_4 & = -1 \\ & +x_2 & +2x_3 & +x_4 & = -1 \end{array}$ | $(1, 1, -1, 0)^T$ |
| 15. | $\begin{array}{rrrrr} 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +5x_4 & = 3 \\ 7x_1 & +3x_2 & +x_3 & +2x_4 & = 2 \\ -4x_1 & +3x_2 & -3x_3 & +2x_4 & = -5 \\ 6x_1 & +10x_2 & & +9x_4 & = 1 \end{array}$ | $\emptyset$ |
| 16. | $\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 & = 3 \\ 4x_1 & -2x_2 & -2x_3 & +3x_4 & = 2 \\ 2x_1 & -x_2 & +5x_3 & -6x_4 & = 1 \\ 2x_1 & -x_2 & -3x_3 & +4x_4 & = 5 \end{array}$ | $\emptyset$ |
| 17. | $\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & -3x_2 & +6x_3 & -x_4 & = 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & & = 0 \\ x_1 & +3x_2 & -x_3 & -x_4 & = -2 \\ 9x_1 & -x_2 & +15x_3 & -5x_4 & = 1 \end{array}$ | $\emptyset$ |
| 18. | $\begin{array}{rrrrr} 5x_1 & +12x_2 & +9x_3 & +25x_4 & = 15 \\ 15x_1 & +34x_2 & +25x_3 & +64x_4 & = 40 \\ 20x_1 & +46x_2 & +34x_3 & +89x_4 & = 70 \\ 10x_1 & +23x_2 & +17x_3 & +44x_4 & = 25 \end{array}$ | $\emptyset$ |
| 19. | $\begin{array}{rrrrr} 5x_1 & +2x_2 & -x_3 & +4x_4 & = 12 \\ 3x_1 & -x_2 & +2x_3 & +6x_4 & = 7 \\ 2x_1 & +3x_2 & -3x_3 & -2x_4 & = 6 \\ x_1 & +5x_2 & +2x_3 & +x_4 & = -1 \end{array}$ | $\emptyset$ |
| 20. | $\begin{array}{rrrrr} x_1 & +x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 2 \\ 2x_1 & +x_2 & +x_3 & -2x_4 & = 1 \\ & -x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 3x_1 & +2x_2 & +3x_3 & -3x_4 & = 3 \end{array}$ | $(2-t, 3-3t, t, 3-2t)^T, t \in \mathbf{R}$ |

21.
$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +x_4 & =1 \\ x_1 & +x_2 & +2x_3 & +3x_4 & =2 \\ 2x_1 & +3x_2 & +x_3 & -x_4 & =1 \\ 3x_1 & +4x_2 & +3x_3 & +2x_4 & =3 \end{array} \quad \left(\frac{5}{2}-\frac{15}{4}t, -\frac{3}{2}+\frac{13}{4}t, \frac{1}{2}-\frac{5}{4}t, t\right)^T, t \in \mathbf{R}$$
22.
$$\begin{array}{rrrrr} 12x_1 & -6x_2 & +9x_3 & +21x_4 & =3 \\ 11x_1 & -5x_2 & +10x_3 & +24x_4 & =1 \\ 7x_1 & -3x_2 & +7x_3 & +17x_4 & =0 \\ 8x_1 & -6x_2 & -x_3 & -5x_4 & =9 \end{array} \quad \left(-\frac{3}{2}-\frac{13}{2}t-\frac{5}{2}s, -\frac{7}{2}-\frac{19}{2}t-\frac{7}{2}s, s, t\right)^T, s, t \in \mathbf{R}$$
23.
$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +3x_2 & -x_3 & +x_4 & =1 \\ 8x_1 & +12x_2 & -9x_3 & +8x_4 & =3 \\ 4x_1 & +6x_2 & +3x_3 & -2x_4 & =3 \\ 2x_1 & +3x_2 & +9x_3 & -7x_4 & =3 \end{array} \quad \left(\frac{5}{8}-3t-s, 2t, 8s, -\frac{1}{4}+10s\right)^T, s, t \in \mathbf{R}$$
24.
$$\begin{array}{rrrrr} 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =5 \\ x_1 & +3x_2 & +5x_3 & -2x_4 & =3 \\ x_1 & +5x_2 & -9x_3 & +8x_4 & =1 \\ 5x_1 & +18x_2 & +4x_3 & +5x_4 & =12 \end{array} \quad (6-26t+17s, -1+7t-5s, t, s)^T, s, t \in \mathbf{R}$$
25.
$$\begin{array}{rrrrr} 5x_1 & +12x_2 & +5x_3 & +3x_4 & =10 \\ 11x_1 & +11x_2 & +4x_3 & +8x_4 & =8 \\ 2x_1 & +7x_2 & +3x_3 & +x_4 & =6 \\ 7x_1 & -3x_2 & -2x_3 & +6x_4 & =-4 \end{array} \quad (8-9t-4s, t, s, -10+11t+5s)^T, s, t \in \mathbf{R}$$
26.
$$\begin{array}{rrrrr} x_1 & +6x_2 & +5x_3 & +5x_4 & =6 \\ 3x_1 & +4x_2 & +2x_3 & +x_4 & =2 \\ 5x_1 & +2x_2 & -x_3 & -3x_4 & =-2 \\ 6x_1 & +8x_2 & +4x_3 & +2x_4 & =4 \end{array} \quad \left(\frac{2}{7}-t-\frac{5}{14}u, t, u, \frac{8}{7}-t-\frac{13}{14}u\right)^T, t, u \in \mathbf{R}$$
27.
$$\begin{array}{rrrrr} 6x_1 & +4x_2 & +5x_3 & +2x_4 & +3x_5 & =1 \\ 3x_1 & +2x_2 & +4x_3 & +x_4 & +2x_5 & =3 \\ 3x_1 & +2x_2 & -2x_3 & +x_4 & & =-7 \\ 9x_1 & +6x_2 & +x_3 & +3x_4 & +2x_5 & =2 \end{array} \quad (a, b, 13, 19-3a-2b, -34)^T, a, b \in \mathbf{R}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 28. & 6x_1 & +3x_2 & +2x_3 & +3x_4 & +4x_5 & = & 5 \\ & 4x_1 & +2x_2 & +x_3 & +2x_4 & +3x_5 & = & 4 \\ & 4x_1 & +2x_2 & +3x_3 & +2x_4 & +x_5 & = & 0 \\ & 2x_1 & +x_2 & +7x_3 & +3x_4 & +2x_5 & = & 1 \end{array}$$

$$(a, b, \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}b, -1 - \frac{14}{3}a - \frac{7}{3}b, 2 + \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}b)^T, a, b \in \mathbf{R}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 29. & -2x_1 & + & 2x_2 & & & = & -6 \\ & x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & -3 \\ & 3x_1 & + & 10x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ & 2x_1 & & & & & - & x_4 & = & 1 \\ & 4x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 5 \end{array} \quad \emptyset$$

$$\begin{array}{rclclcl} 30. & 6x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & - & 7x_4 & = & -1 \\ & x_1 & - & x_2 & & & - & 3x_4 & = & -1 \\ & 7x_1 & - & 2x_2 & - & 2x_3 & - & 10x_4 & = & -2 \\ & 7x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & 9x_4 & = & -4 \\ & 2x_1 & & & - & 2x_3 & - & 4x_4 & = & -6 \end{array} \quad (2, -\frac{9}{2}, 0, \frac{5}{2})^T$$

$$\begin{array}{rclclcl} 31. & 5x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 7x_4 & = & 5 \\ & 11x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & = & 4 \\ & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 9x_4 & = & 8 \\ & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 5x_4 & = & 3 \\ & 9x_1 & + & 4x_2 & + & 8x_3 & + & 4x_4 & = & 10 \end{array} \quad (2-8t, -\frac{9}{2}+13t, 6t, \frac{5}{2}-7t)^T, t \in \mathbf{R}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 32. & x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ & 3x_1 & - & 5x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ & 4x_1 & + & 3x_2 & - & 7x_3 & + & 2x_4 & = & -5 \\ & -x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2 \\ & 3x_1 & + & x_2 & - & 4x_3 & + & 2x_4 & = & -2 \end{array} \quad (t, t, 1+t, 1)^T, t \in \mathbf{R}$$

$$\begin{array}{rclclcl} 33. & 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 15 \\ & x_1 & - & x_2 & + & x_3 & - & x_4 & + & x_5 & = & 2 \\ & 3x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & - & 2x_5 & = & 5 \\ & 2x_1 & & & + & 3x_3 & & & & & = & 0 \\ & & & x_2 & & & + & x_4 & & & = & 0 \end{array} \quad (3, 0, -2, 0, 1)^T$$

$$\begin{array}{rcl}
 x_1 + x_2 + x_3 + x_4 & = & 1 \\
 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 & = & 1 \\
 34. \quad x_1 + x_2 + 5x_3 - x_4 + 6x_5 & = & 1 \\
 x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - 6x_5 & = & -1
 \end{array} \quad \emptyset$$

4.2 Cramerovo pravidlo

Riešime sústavu lineárnych rovníc

$$\begin{aligned}
 a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\
 a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\
 a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3
 \end{aligned}$$

Aby sme mohli použiť Cramerovo pravidlo, je nutné vypočítať determinanty

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

pričom matica, z ktorej sa vypočíta determinant D musí byť regulárna ($D \neq 0$).

Riešenie takejto sústavy je

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

Príklad 4 *Riešme sústavu rovníc*

$$\begin{array}{rcl}
 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 & = & -5 \\
 x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \\
 -3x_1 + x_2 + 3x_3 & = & 7
 \end{array}$$

Riešenie: Vypočítame determinanty $D = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -14 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -5 & 3 & -4 \\ 0 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 2 & -5 & -4 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 7 & 3 \end{vmatrix} = -14, \quad D_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & 7 \end{vmatrix} = -28$$

$$x_1 = \frac{0}{-14} = 0, \quad x_2 = \frac{-14}{-14} = 1, \quad x_3 = \frac{-28}{-14} = 2.$$

Riešenie sústavy zapíšeme v tvare $(x_1, x_2, x_3)^T = (0, 1, 2)^T$.

Neriešené úlohy

V úlohách 35 – 58 riešte sústavy lineárnych rovníc využitím Cramerovho pravidla:

Výsledky:

- | | | |
|-----|---|----------------|
| 35. | $\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 & = & 6 \\ x_1 + 2x_2 & = & 5 \end{array}$ | $(3, 1)^T$ |
| 36. | $\begin{array}{rcl} 3x_1 - 4x_2 & = & -6 \\ 3x_1 + 4x_2 & = & 18 \end{array}$ | $(2, 3)^T$ |
| 37. | $\begin{array}{rcl} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 + 6x_2 + x_3 & = & 2 \\ 4x_1 + 8x_2 - x_3 & = & 2 \end{array}$ | $(3, -1, 2)^T$ |
| 38. | $\begin{array}{rcl} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & = & 8 \\ x_1 + 5x_2 + 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 & = & 3 \end{array}$ | $(2, 1, -1)^T$ |
| 39. | $\begin{array}{rcl} 2x_1 - 3x_2 + x_3 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & = & 12 \end{array}$ | $(2, 3, 5)^T$ |
| 40. | $\begin{array}{rcl} 12x_1 - x_2 + 5x_3 & = & 30 \\ 3x_1 - 13x_2 + 2x_3 & = & 21 \\ 7x_1 + 2x_2 + 3x_3 & = & 15 \end{array}$ | $(2, -1, 1)^T$ |
| 41. | $\begin{array}{rcl} 3x_1 + x_2 - 4x_3 & = & 1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 & = & 5 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 & = & 4 \end{array}$ | $(1, -2, 0)^T$ |
| 42. | $\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 & = & -6 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 & = & 17 \end{array}$ | $(1, -1, 2)^T$ |
| 43. | $\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 9 \\ -x_1 + 3x_2 & = & -4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 & = & 17 \end{array}$ | $(1, -1, 2)^T$ |
| 44. | $\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 & = & 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = & 1 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 6 \end{array}$ | $(2, -1, 0)^T$ |

45.
$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 6 \\ 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 3x_1 & & & - & x_3 & = & 0 \end{array} \quad (1, 2, 3)^T$$
46.
$$\begin{array}{rclcl} 4x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 11 \\ 2x_1 & - & 3x_2 & + & 2x_3 & = & 9 \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & -3 \end{array} \quad (2, -3, -2)^T$$
47.
$$\begin{array}{rclcl} & & 6x_2 & + & 4x_3 & = & -12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & & & = & 9 \\ 2x_1 & & & - & 3x_3 & = & 10 \end{array} \quad (5, -2, 0)^T$$
48.
$$\begin{array}{rclcl} 3x_1 & + & 3x_2 & + & 5x_3 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 5x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \\ 5x_1 & + & 9x_2 & + & 17x_3 & = & 0 \end{array} \quad (1, -\frac{3}{2}, \frac{1}{2})^T$$
49.
$$\begin{array}{rclcl} x_1 & & & - & 3x_3 & = & -2 \\ 3x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & = & 5 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 4 \end{array} \quad (4, -3, 2)^T$$
50.
$$\begin{array}{rclcl} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & = & -4 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \end{array} \quad (-1, 2, 1)^T$$
51.
$$\begin{array}{rclcl} -x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & -2 \\ 5x_1 & + & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 4 \end{array} \quad (2, -3, 3)^T$$
52.
$$\begin{array}{rclcl} 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 2 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 2 \end{array} \quad (1, 1, 1)^T$$
53.
$$\begin{array}{rclcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ -3x_1 & & & - & 2x_3 & = & -4 \\ x_1 & + & 8x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array} \quad (2, \frac{1}{2}, -1)^T$$
54.
$$\begin{array}{rclcl} -2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & 4 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & 16 \end{array} \quad (1, 2, 3)^T$$

$$\begin{array}{rcll} & x_1 & + x_2 & + 2x_3 & - x_4 & = 2 \\ 55. & 2x_1 & + x_2 & + x_3 & - x_4 & = 3 \\ & x_1 & + 2x_2 & + x_3 & + x_4 & = 3 \\ & -x_1 & + x_2 & + 2x_3 & + x_4 & = 0 \end{array} \quad (1, 1, 0, 0)^T$$

$$\begin{array}{rcll} & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & x_4 & = & 20 \\ 56. & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & x_4 & = & 11 \\ & 2x_1 & + & 10x_2 & + & 9x_3 & + & 7x_4 & = & 40 \\ & 3x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & + & 2x_4 & = & 37 \end{array} \quad (1, 2, 2, 0)^T$$

$$\begin{array}{rcll} & 2x_1 & + & 3x_2 & + & 11x_3 & + & 5x_4 & = & 2 \\ 57. & x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & + & 2x_4 & = & 1 \\ & 2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ & x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & -3 \end{array} \quad (-2, 0, 1, -1)^T$$

$$\begin{array}{rcll} & 3x_1 & + & 4x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & -3 \\ 58. & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 5x_4 & = & -6 \\ & 6x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & -8 \\ & 3x_1 & + & 5x_2 & + & 3x_3 & + & 7x_4 & = & -8 \end{array} \quad (2, -2, 1, -1)^T$$

POUŽITÁ LITERATÚRA

- [1] *Demidovič, B. P.:* **Sbornik zadač i upražnenij po matematičeskomu analizu**, Nauka, Moskva, 1977.
- [2] *Džurina, J. - Grinčová, A. - Pirč, V.:* **Matematická analýza 1**, ISBN 80-8073-307-4.
Názov www stránky: http://217.67.26.34/active_download/mal/ulern_viewer.htm
- [3] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.:* **Zbierka úloh z vyššej matematiky 1**, ALFA, Bratislava 1968, ISBN 63-066-68.
- [4] *Eliaš, J. - Horváth, J. - Kajan, J.:* **Zbierka úloh z vyššej matematiky 2**, ALFA, Bratislava 1969, ISBN 63-037-69.
- [5] *Ivan, J.:* **Matematika 1**, ALFA/SNTL, Bratislava 1983.
- [6] *Jirásek, F. - Kriegelstein, E. - Tichý, Z.:* **Sbírka řešených příkladů z matematiky**, SNTL/ALFA, Praha 1982.
- [7] *Kluvánek, I. - Mišík, L. - Švec, M.:* **Matematika I**, SVTL, Bratislava 1966.
- [8] *Marčoková, M. - Moravčík, J. - Ružičková, M.:* **Matematika IV**, Žilinská univerzita, EDIS - vydavateľstvo ŽU, 2000, ISBN 80-7100-697-1.
- [9] *Molnárová, M. - Myšková, H.:* **Úvod do lineárnej algebry**, TU, Košice, 2005, ISBN 80-8073-361-9.
- [10] *Pirč, V. - Haščák, A.:* **Matematická analýza I**, elfa s.r.o. Košice 2000, ISBN 80-88786-92-4.
- [11] *Šoltés, V. - Juhássová, Z.:* **Zbierka úloh z vyššej matematiky I**, Edičné stredisko TU v Košiciach 1992.

NÁZOV: Matematika I v príkladoch pre Aplikovanú informatiku (1. časť)

AUTOR: Grinčová Anna

VYDAVATEĽ: Technická univerzita v Košiciach

ROK: 2025

VYDANIE: prvé

ROZSAH: 41 strán

ISBN:

