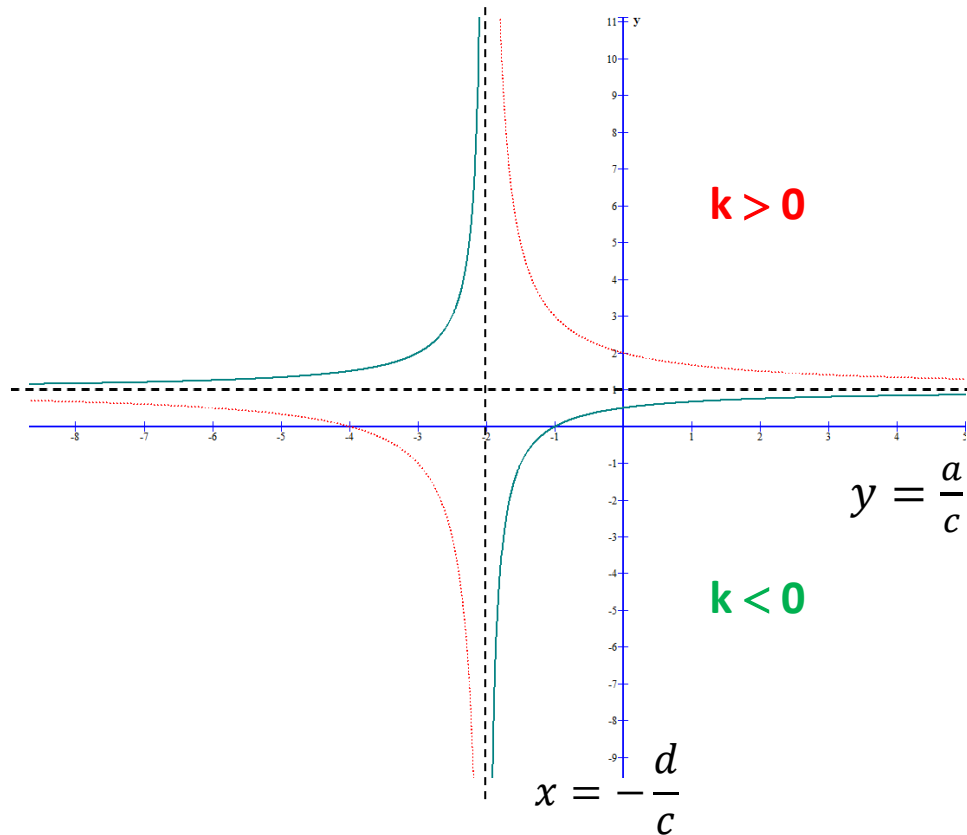


Matematika 1 – 4.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Elementárne funkcie

Lomená funkcia $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in R$



$$y = \frac{ax+b}{cx+d} \rightarrow y = \frac{k}{x-m} + s$$

Asymptoty:

$$x = m = -\frac{d}{c} \quad \text{posun na osi } x$$

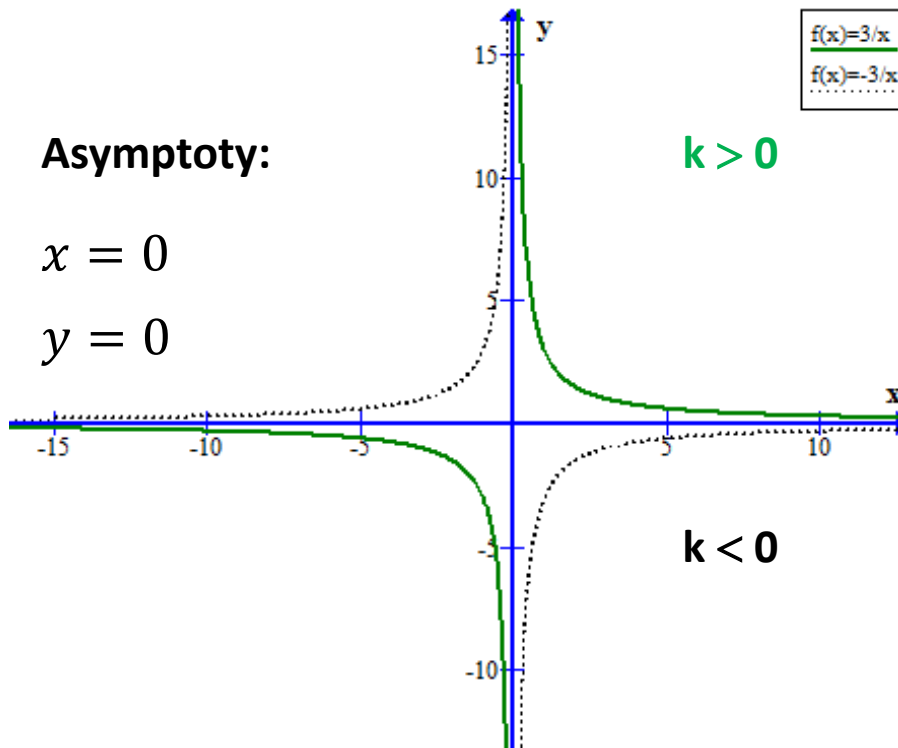
$$y = s = \frac{a}{c} \quad \text{posun na osi } y$$

Grafom je hyperbola.

$$D(f) = R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$$

Elementárne funkcie

Lomená funkcia – nepriama úmernosť $y = \frac{k}{x}$
 $k \in \mathbb{R} - \{0\}$



Grafom je hyperbola.

$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Pr. 1: Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = \frac{-3}{x}$

Postup pri zostrojovaní grafu:

b) $y = \frac{5}{x+1}$ dú

c) $y = \frac{5}{x}$ dú

d) $y = \frac{-2}{x+2}$

e) $y = \frac{2x}{x+1}$

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť polohu asymptót.
3. Vypočítať pre jeden zvolený bod z $D(f)$ jeho y a viesť ním rameno hyperboly.
4. Symetricky viesť druhé rameno hyperboly v protíľahlom kvadrante.

Správnosť nakreslenia grafov z dú si môžete overiť pomocou grafov SageMath, návod nájdete na predposlednej snímke.

a) $y = \frac{-3}{x}$

$$x \neq 0$$

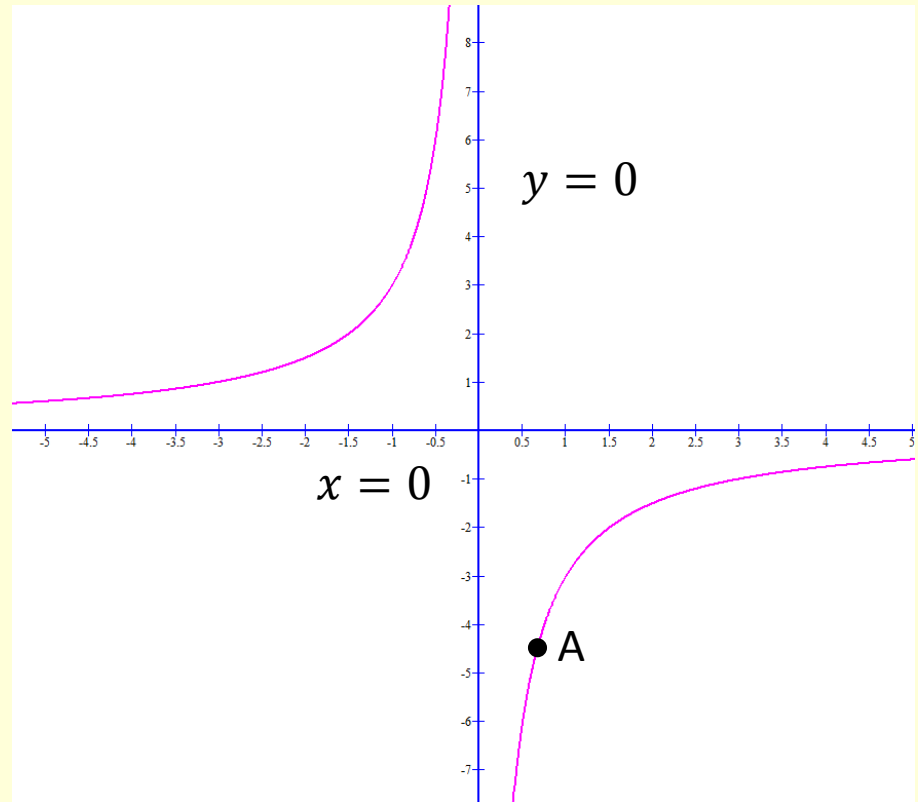
$$D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

Asymptoty: typ $y = \frac{k}{x}$

$$x = 0$$

$$y = 0$$

$$A: x = 1, y = \frac{-3}{1} = -3$$



$$d) \quad y = \frac{-2}{x+2}$$

$$x + 2 \neq 0$$

$$x \neq -2$$

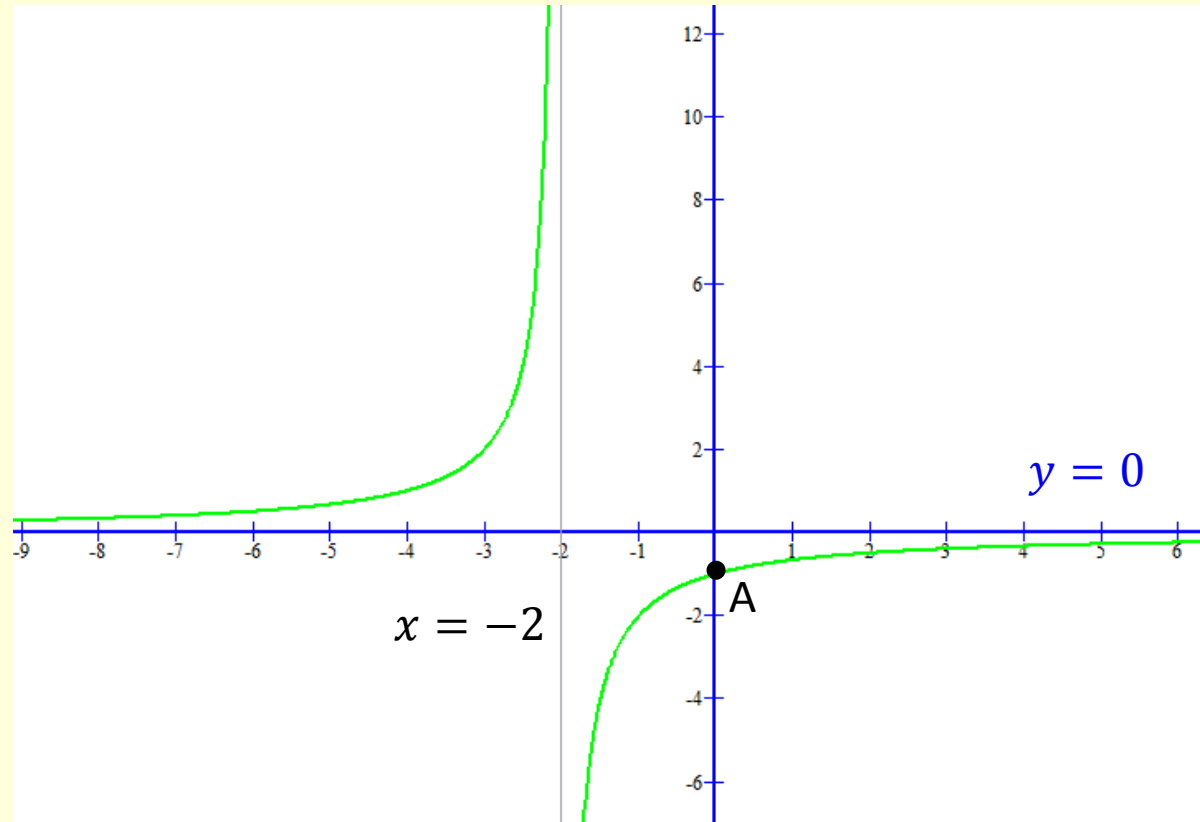
$$D(f) = \mathbb{R} - \{-2\}$$

Asymptoty:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$y = \frac{a}{c} = \frac{0}{1} = 0$$

$$A: x = 0, y = \frac{-2}{0+2} = -1$$



$$\text{e) } y = \frac{2x}{x+1}$$

$$x + 1 \neq 0$$

$$x \neq -1$$

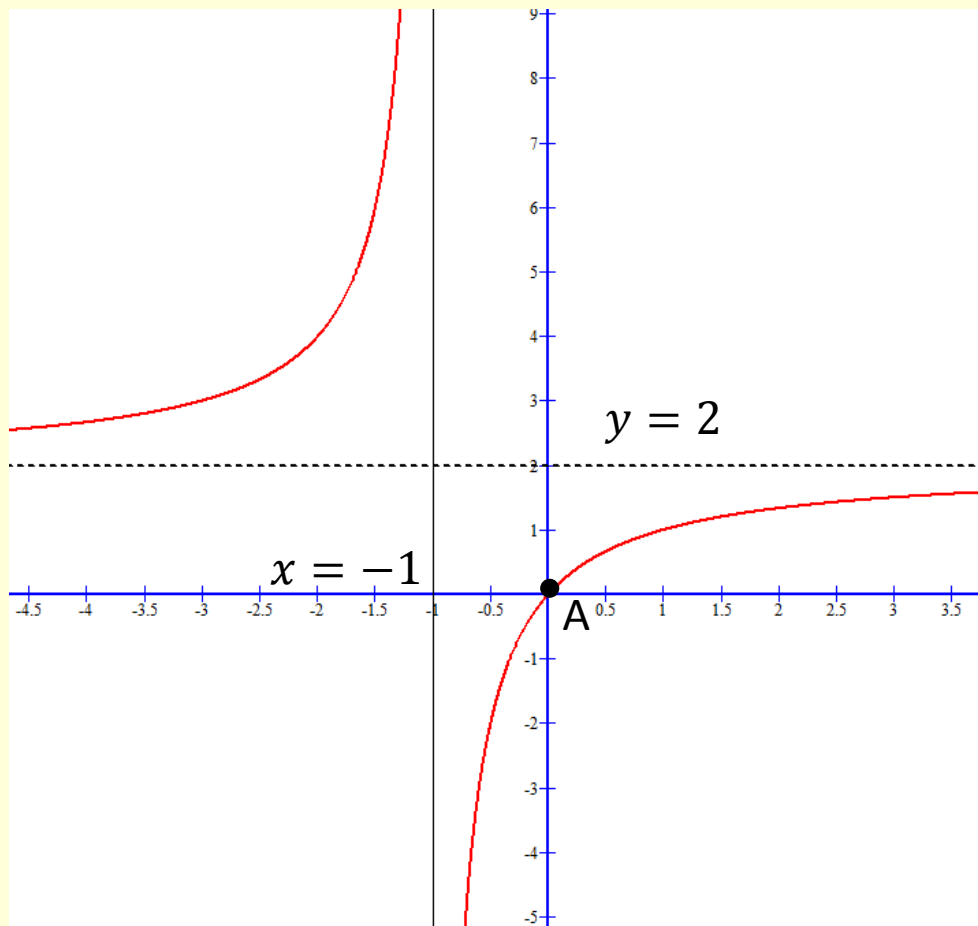
$$D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

Asymptoty:

$$x = \frac{-d}{c} = \frac{-1}{1} = -1$$

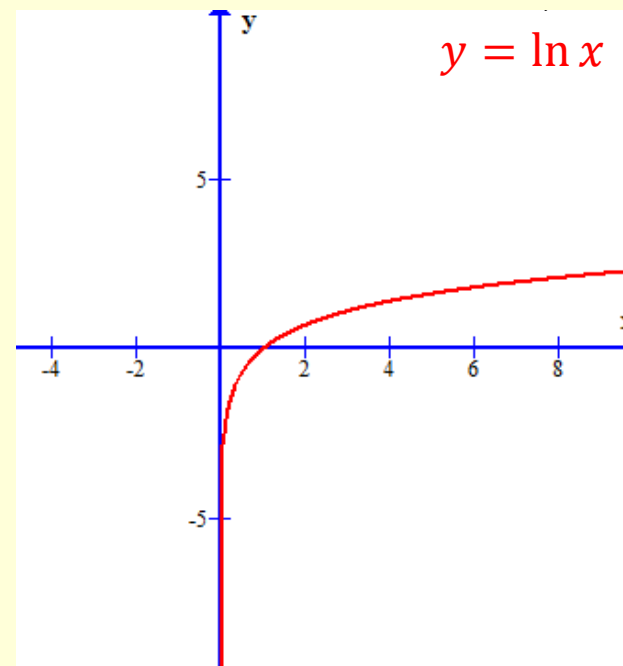
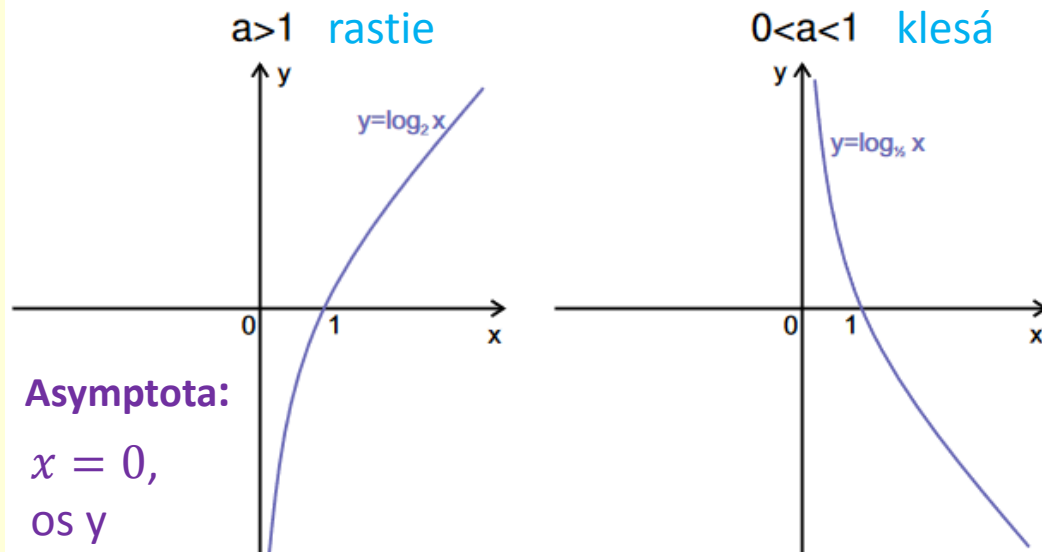
$$y = \frac{a}{c} = \frac{2}{1} = 2$$

$$A: x = 0, y = \frac{0}{0+1} = 0$$



Elementárne funkcie

Logaritmická funkcia $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$



Číslo a nazývame základ funkcie.

$$D(f) = (0, \infty)$$

Pr. 2: Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = \log_2(x + 4)$

b) $y = \log_{0,5}(x + 2)$ dú

c) $y = \log_3 x$ dú

d) $y = \log_{0,5} x$

Správnosť nakreslenia grafov z dú si môžete overiť pomocou grafov SageMath, návod nájdete na predposlednej snímke.

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

d) $y = \log_{0,5} x$

$$x > 0$$

$$D(f) = (0, \infty) \quad a = 0,5, \text{ klesá}$$

asymptota: $x = 0$

priesečníky s osou y nemá

priesečníky s osou x :

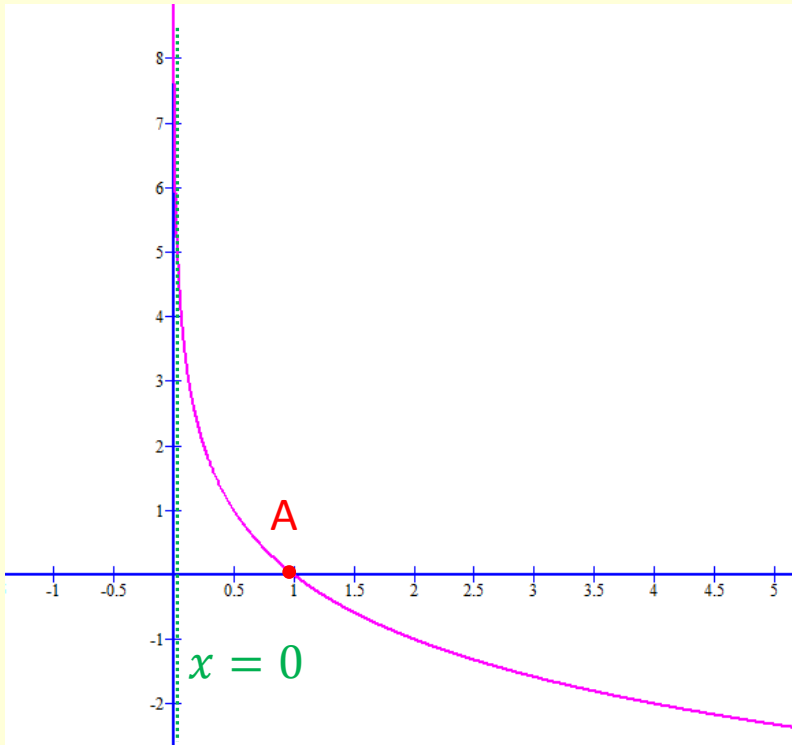
$$y = 0$$

$$0 = \log_{0,5} x$$

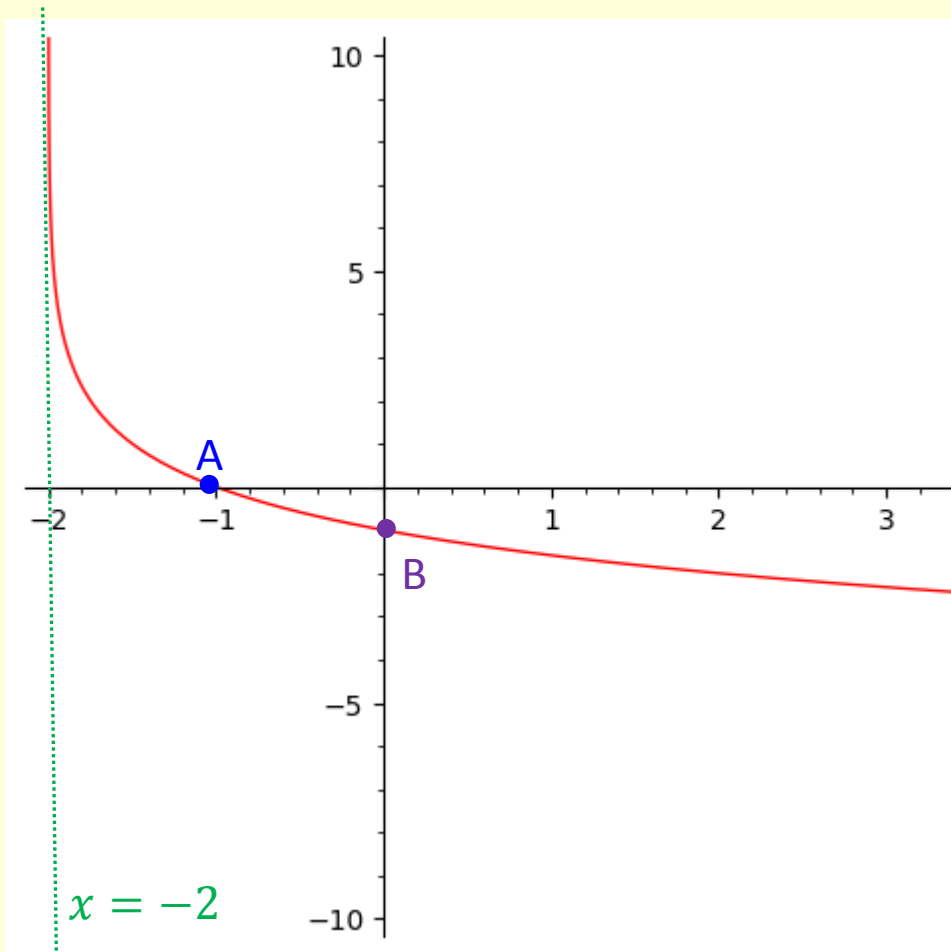
$$0,5^0 = x$$

$$1 = x$$

$$A: y = 0, x = 1$$



b) $y = \log_{0,5}(x + 2)$



$$x + 2 > 0$$

$$x > -2$$

$$D(f) = (-2, \infty) \quad a = 0,5, \text{ klesá}$$

asymptota: $x + 2 = 0$

$$x = -2$$

priesečník s osou x: $y = 0$

$$0 = \log_{0,5}(x + 2)$$

$$0,5^0 = x + 2$$

$$1 = x + 2$$

$$A: x = -1, y = 0$$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = \log_{0,5}(0 + 2)$$

$$y = \log_{0,5}(2)$$

$$0,5^y = 2$$

$$1^y = 1^{-1}$$

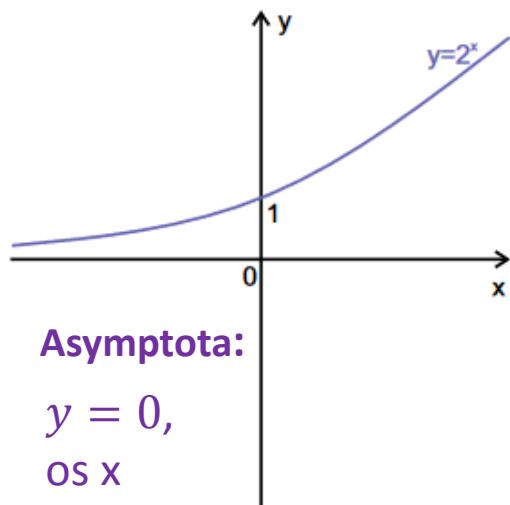
$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$B: y = -1, x = 0$$

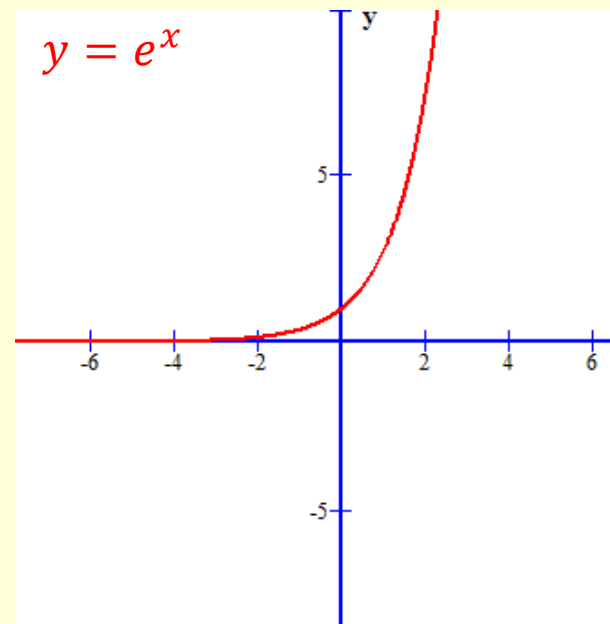
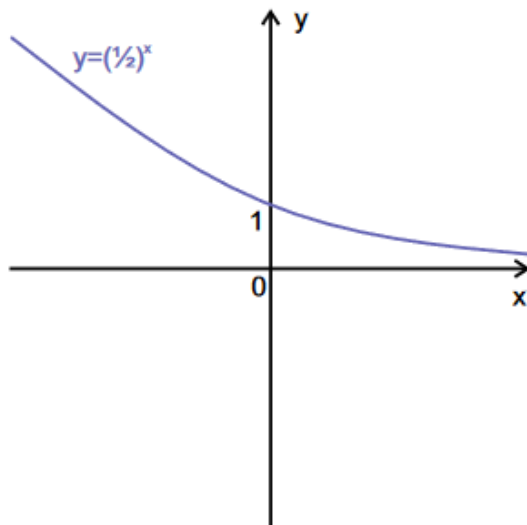
Elementárne funkcie

Exponenciálna funkcia $y = a^x, a > 0, a \neq 1$

$a > 1$ rastie



$0 < a < 1$ klesá



Číslo a nazývame základ funkcie.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Pr. 3: Načrtnite grafy funkcií:

a) $y = 0,2^x - 5$

b) $y = 4^x + 2$ dú

c) $y = 2^x - 1$ dú

d) $y = 0,5^x$ dú

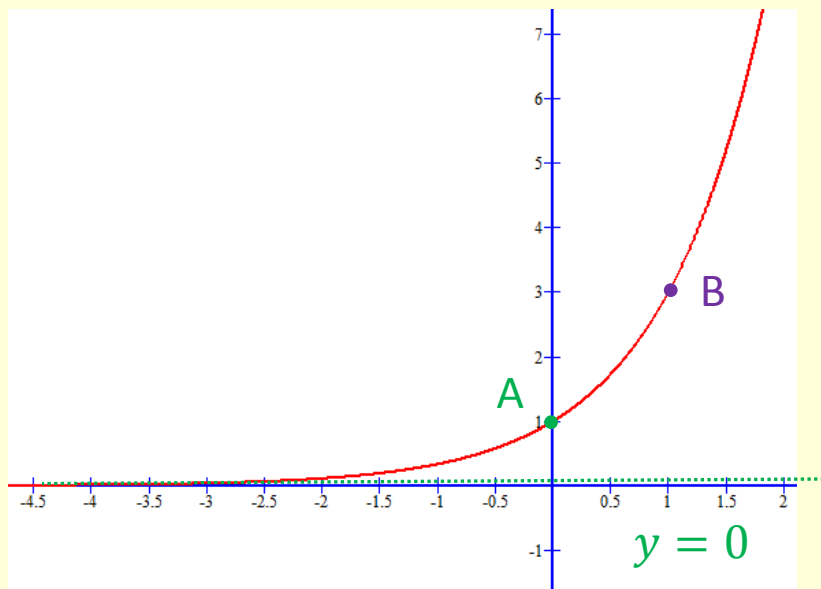
e) $y = 3^x$

Správnosť nakreslenia grafov z dú si môžete overiť pomocou grafov SageMath, návod nájdete na predposlednej snímke.

Postup pri zostrojení grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

e) $y = 3^x$



$D(f) = \mathbb{R}$ $a = 3$, rastie

asymptota: $y = 0$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 3^0$$

$$y = 1$$

A: $x = 0, y = 1$

priesečník s osou x: nemá

ak $y = 0$, potom rovnica

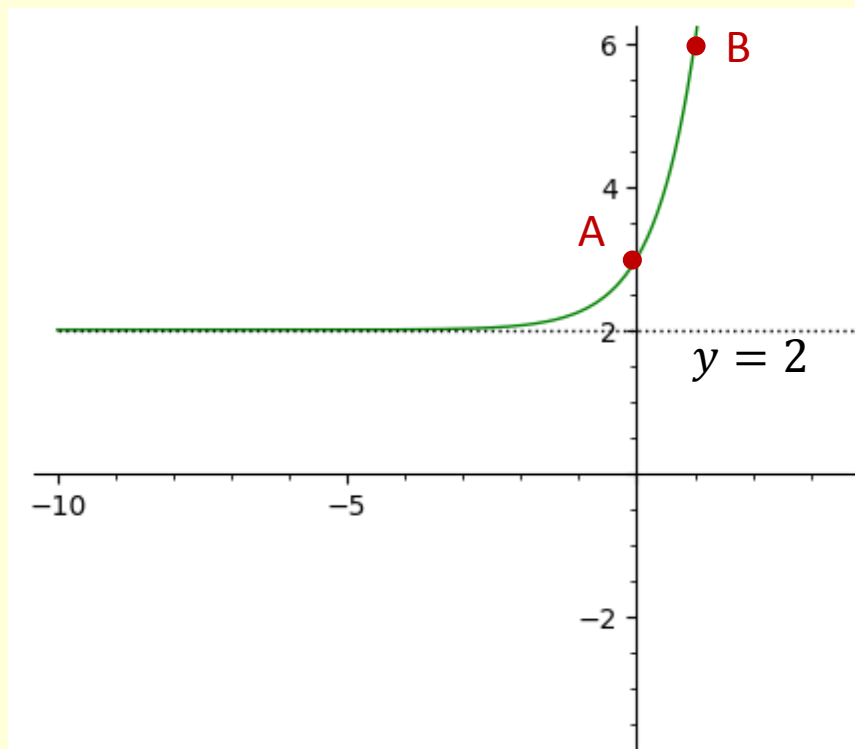
$0 = 3^x$ nemá riešenie

zvolíme $x = 1$

$$y = 3^1 = 3$$

B: $x = 1, y = 3$

b) $y = 4^x + 2$



$D(f) = \mathbb{R}$ $a = 4$, rastie

asymptota: $y - 2 = 0$
 $y = 2$

priesečník s osou y: $x = 0$

$$y = 4^0 + 2$$

$$y = 1 + 2$$

A: $y = 3, x = 0$

priesečník s osou x: nemá

ak $y = 0$, potom rovnica

$$0 = 4^x + 2 \text{ nemá riešenie}$$

zvolíme $x = 1$

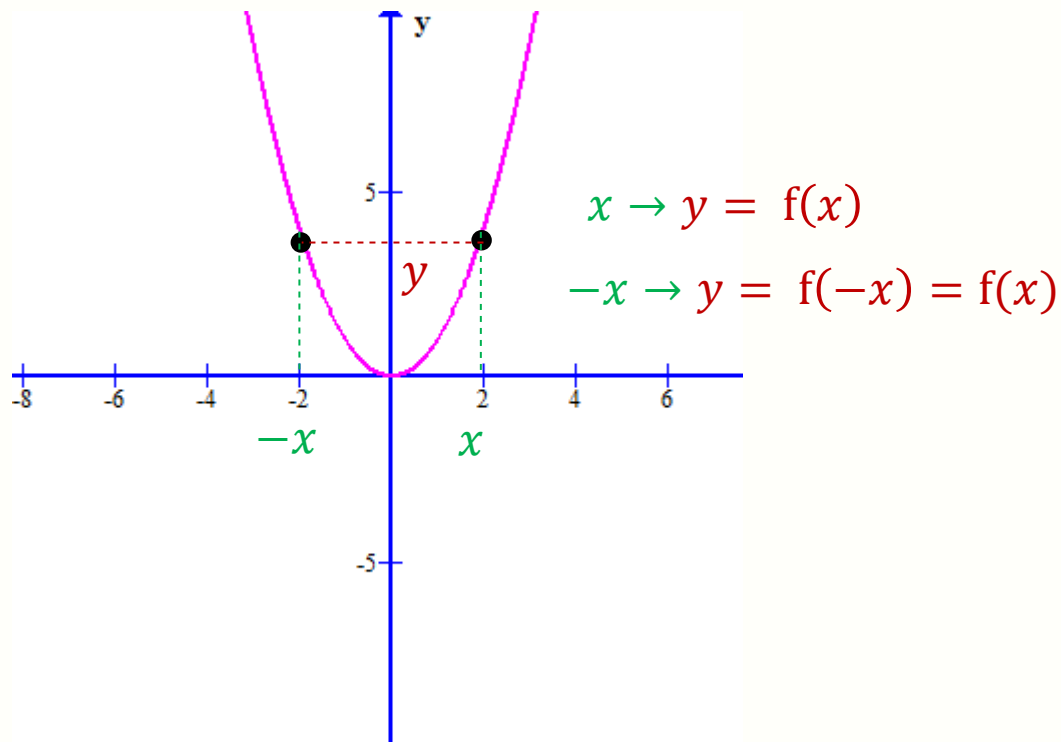
$$y = 4^1 + 2 = 6$$

B: $x = 1, y = 6$

Párnosť a nepárnosť funkcie

Párna funkcia:

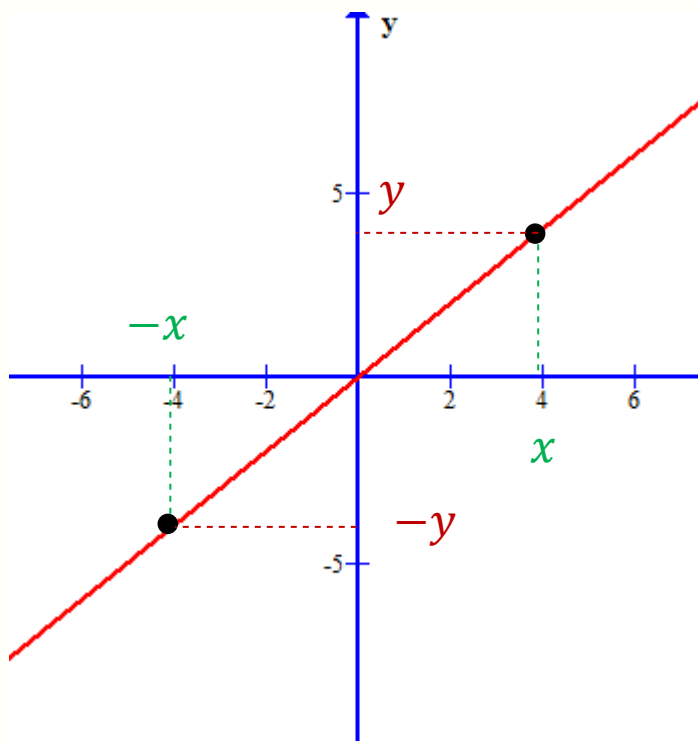
$$x, -x \in D(f), f(x) = f(-x)$$



Graf je súmerný podľa osi y .

nepárna funkcia:

$$x, -x \in D(f), f(-x) = -f(x)$$



$$x \rightarrow y = f(x)$$

$$\begin{aligned} -x &\rightarrow -y = f(-x) \neq f(x) \\ -y &= f(-x) = -f(x) \end{aligned}$$

Graf je stredovo súmerný podľa bodu (0, 0)

Ani párna ani nepárna funkcia: nespĺňa predchádzajúce podmienky pre párnú a nepárnu funkciu

Pr. 1 – 13 / 1

$$f : y = x^5 - x$$

Pr. 2 – 13 / 3

$$f : y = \sin x + \cos x$$

Pr. 3 – 13 / 4

$$f : y = \frac{\cos x}{x}$$

nepárna

Pr. 4 – 13 / 7

$$f : y = x^2 + \sin x^2$$

párna

Overte si párnosť a nepárnosť funkcií z cvičenia pomocou grafov v SageMath.
Návod na predposlednej snímke.

Pr. 3 – 13 / 4

$$f : y = \frac{\cos x}{x}$$

nepárna

$$f(-x) = \frac{\cos(-x)}{-x} = \frac{\cos x}{-x} = -\frac{\cos x}{x}$$

Funkcia kosínus je párna:

$$\cos(-x) = \cos x$$

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{funkcia je nepárna}$$

Pr. 4 – 13 / 7

$$f : y = x^2 + \sin x^2$$

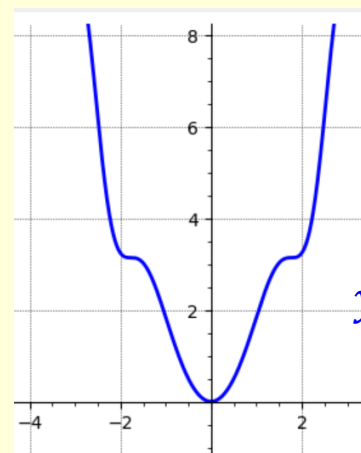
párna

Funkcia x^2 je párna:

$$(-x)^2 = x^2$$

$$f(-x) = (-x)^2 + \sin(-x)^2 = x^2 + \sin x^2$$

$$f(-x) = f(x) \quad \text{funkcia je párna}$$



Z grafu vidieť, že funkcia je symetrická podľa osi y – je párna

$$y = x^2 + \sin x^2$$

Dú: str.13 / 2, 6, 8,10

Limita funkcie

Zápis limity:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$$

Pri výpočte limity:

a) dosadíme za neznáme x číslo a , ak **žiadna neurčitost'**, vypočítame limitu

Pr. 1 – 16 / 1:

Typy neurčitosti: $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\infty - \infty$, 1^∞

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 5}{x^2 - 3}$$

Pr. 2:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x + 5}{x^2 - 4} = \frac{1^3 + 3 \cdot 1 + 5}{1^2 - 4} = \frac{9}{-3} = -3$$

b) dosadíme za neznáme x číslo a , ak **neurčitost'** $\frac{0}{0}$, urobíme rozklad na súčin v čitateli aj v menovateli (ak v čitateli a menovateli **polynómy**)

Pr. 3 – 16 / 7

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x^2 + 6x + 5}$$

Pr. 4 – 16 / 3

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$$

4

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(2)^2 - 4}{2 - 2} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{0}{0} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x + 2)}{(x - 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x + 2) = 2 + 2 = 4$$

Dú : 16 / 4, 8

c) dosadíme za neznáme x číslo a , ak **neurčitost'** $\frac{0}{0}$, rozšíříme vhodnou jednotkou (ak v čitateli alebo menovateli druhá odmocnina alebo v oboch, s použitím vzorca $a^2 - b^2$ upravíme tak, aby sme sa zbavili $\sqrt{}$)

Pr. 5 – 17 / 17

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - \sqrt{x}}{\sqrt{x} - 1}$$

Pomocou vzťahu $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ upravujeme menovateľa, aby sme sa zbavili druhej odmocniny a zároveň neurčitosti.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x}$$

0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+0^2} - 1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} = \frac{0}{0} \quad \begin{matrix} (a-b) & (a+b) \\ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2} - 1}{x} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{1+x^2})^2 - 1^2}{x \cdot (\sqrt{1+x^2} + 1)} = \end{matrix}$$

vhodná jednotka

$$\frac{\sqrt{1+x^2} + 1}{\sqrt{1+x^2} + 1} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \cdot (\sqrt{1+x^2} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(\sqrt{1+x^2} + 1)} = \frac{0}{(\sqrt{1+0^2} + 1)} = 0$$

Pomocou vzťahu $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ upravujeme čitateľa, aby sme sa zbavili druhej odmocniny a zároveň neurčitosti.

Na stránke <https://feimat.azurewebsites.net> kde sa prihláste ako **Host'**.
Otvorte si časť **Definičný obor funkcie – čítať viac.**

1. → Všetky články

2. ↓ SageMath kód

3. Evaluate

4. $f(x) = \sqrt{2 + x - x^2}$

zváženie priestoru pre zobrazenie grafu

Návod na použitie Sage pri zobrazení grafov:

- nakopírujte kód z ľavej lišty (Copy d.o.f) a vložte do okna SageMath kód
- pre zobrazenie riešenia stlačte Evaluate (zobrazí sa riešenie pre 1. úlohu)
- pre **zobrazenie grafov** vložte do bunky $f(x)$ rovnicu upravenú pre Sage, stlačte Enter na klávesnici
- priestor pre SageMath kód a grafy si zvážite pomocou sivého posuvníka

Poznámka: ak sa Vám nezobrazí celý graf danej funkcie zmeňte oblasť zobrazenia súradníc pomocou x_{min} , x_{max} , y_{min} , y_{max}

Zápis funkcií v Sage kóde: na ďalšej snímke

Zápis funkcií v Sage kóde:

<u>lineárna funkcia:</u>	$a*x+b$	napr: $5*x-8$
<u>kvadratická funkcia:</u>	$a*x^2+b*x+c$	napr. $2*x^2-3*x+5$
<u>mocninová funkcia:</u>	$a*x^n$	napr. $0.5*x^3$
<u>gonimetrická funkcia:</u>	$\sin(x)$, $\cos(x)$	napr. $\sin(x*x)$
<u>lomená funkcia:</u>	$(a*x+b)/(c*x+d)$	napr. $(2*x)/(5*x-1)$
<u>logaritmická funkcia:</u>	$\log(x, \text{základ})$	napr. $\log(x, 0.5)$
<u>exponenciálna funkcia:</u>	a^x	napr. 3^x
<u>funkcia arcsin , arccos:</u>	$\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$	napr. $5*x-8$