

GAaDO

Acyklické grafy

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom

① **Most**

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom

- 1 **Most** je hrana $h \in H$, ktorú keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 2 **Artikulácia**

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom

- 1 **Most** je hrana $h \in H$, ktorú keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 2 **Artikulácia** je vrchol $v \in V$, ktorý keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 3 **Acyklický graf**

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom

- 1 **Most** je hrana $h \in H$, ktorú keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 2 **Artikulácia** je vrchol $v \in V$, ktorý keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 3 **Acyklický graf** je graf, ktorý neobsahuje kružnicu ako podgraf.
- 4 **Strom**

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom

- 1 **Most** je hrana $h \in H$, ktorú keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 2 **Artikulácia** je vrchol $v \in V$, ktorý keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 3 **Acyklický graf** je graf, ktorý neobsahuje kružnicu ako podgraf.
- 4 **Strom** je súvislý acyklický graf.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom

- 1 **Most** je hrana $h \in H$, ktorú keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 2 **Artikulácia** je vrchol $v \in V$, ktorý keď z grafu odoberieme, vzrastie nám počet komponentov grafu.
- 3 **Acyklický graf** je graf, ktorý neobsahuje kružnicu ako podgraf.
- 4 **Strom** je súvislý acyklický graf.

les = acyklický graf

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.
- 3 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.
- 3 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.
- 4 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a $|H| = |V| - 1$.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.
- 3 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.
- 4 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a $|H| = |V| - 1$.
- 5 V grafe $G = (V, H)$ platí $|H| = |V| - 1$ a G je acyklický.

Budeme dokazovať podľa schémy

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 5. \Rightarrow 1.$$

1. $\Rightarrow$ 2. :

- Nech $G = (V, H)$ je strom. Sporom. Nech existujú:

$$S_1 : u = v_1 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n v_n = v$$

$$S_2 : u = w_1 w_1 w_2 \dots w_{m-1} w_m w_m = v$$

1. $\Rightarrow$ 2. :

- Nech $G = (V, H)$ je strom. Sporom. Nech existujú:
 $S_1 : u = v_1 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n v_n = v$
 $S_2 : u = w_1 w_1 w_2 \dots w_{m-1} w_m w_m = v$
- Nech $k \in \mathbb{N}$ je najmenšie také, že $v_k \neq w_k$ (t.j. $v_i = w_i, i < k$).

1. $\Rightarrow$ 2. :

- Nech $G = (V, H)$ je strom. Sporom. Nech existujú:
 $S_1 : u = v_1 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n v_n = v$
 $S_2 : u = w_1 w_1 w_2 \dots w_{m-1} w_m w_m = v$
- Nech $k \in \mathbb{N}$ je najmenšie také, že $v_k \neq w_k$ (t.j. $v_i = w_i, i < k$).
- Nech $p > k$ je najmenšie také, že $v_p \in V(S_1)$ aj $v_p \in V(S_2)$.

1. $\Rightarrow$ 2. :

- Nech $G = (V, H)$ je strom. Sporom. Nech existujú:
 $S_1 : u = v_1 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n v_n = v$
 $S_2 : u = w_1 w_1 w_2 \dots w_{m-1} w_m w_m = v$
- Nech $k \in \mathbb{N}$ je najmenšie také, že $v_k \neq w_k$ (t.j. $v_i = w_i, i < k$).
- Nech $p > k$ je najmenšie také, že $v_p \in V(S_1)$ aj $v_p \in V(S_2)$.
- Nech $q > k$, je najmenšie také, že $w_q \in V(S_2)$ aj $w_q \in V(S_1)$.

1. $\Rightarrow$ 2. :

- Nech $G = (V, H)$ je strom. Sporom. Nech existujú:

$$S_1 : u = v_1 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n v_n = v$$

$$S_2 : u = w_1 w_1 w_2 \dots w_{m-1} w_m w_m = v$$

- Nech $k \in \mathbb{N}$ je najmenšie také, že $v_k \neq w_k$ (t.j. $v_i = w_i, i < k$).
- Nech $p > k$ je najmenšie také, že $v_p \in V(S_1)$ aj $v_p \in V(S_2)$.
- Nech $q > k$, je najmenšie také, že $w_q \in V(S_2)$ aj $w_q \in V(S_1)$.
 $v_p = w_q$. Dostávame:

$$w_{k-1} = v_{k-1} v_k v_{k+1} \dots v_{p-1} v_p = w_q$$

$$v_{k-1} = w_{k-1} w_k w_{k+1} \dots w_{q-1} w_q = v_p$$

Máme cyklus. Spor!

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.
- 3 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.
- 4 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a $|H| = |V| - 1$.
- 5 V grafe $G = (V, H)$ platí $|H| = |V| - 1$ a G je acyklický.

2. $\Rightarrow$ 3. :

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $\forall u, v \in V, u \neq v, \exists ! uv$ – cesta

2. $\Rightarrow$ 3. :

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $\forall u, v \in V, u \neq v, \exists ! uv$ – cesta
 $\Rightarrow$

G je súvislý. Sporom. Nech $\exists uv \in H$, ktorá nie je mostom

2. $\Rightarrow$ 3. :

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $\forall u, v \in V, u \neq v, \exists ! uv$ – cesta
 $\Rightarrow$

G je súvislý. Sporom. Nech $\exists uv \in H$, ktorá nie je mostom $\Rightarrow$
 $G - uv$ je súvislý

2. $\Rightarrow$ 3. :

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $\forall u, v \in V, u \neq v, \exists ! uv$ – cesta
 $\Rightarrow$

G je súvislý. Sporom. Nech $\exists uv \in H$, ktorá nie je mostom $\Rightarrow$
 $G - uv$ je súvislý $\Rightarrow$

$\exists uv$ cesta ozn. S neobsahujúca hranu uv , pričom $S \neq uv$

2. $\Rightarrow$ 3. :

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $\forall u, v \in V, u \neq v, \exists ! uv$ – cesta
 $\Rightarrow$

G je súvislý. Sporom. Nech $\exists uv \in H$, ktorá nie je mostom $\Rightarrow$
 $G - uv$ je súvislý $\Rightarrow$

$\exists uv$ cesta ozn. S neobsahujúca hranu uv , pričom $S \neq uv \Rightarrow$
Spor s existenciou jedinej uv – cesty.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.
- 3 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.
- 4 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a $|H| = |V| - 1$.
- 5 V grafe $G = (V, H)$ platí $|H| = |V| - 1$ a G je acyklický.

3. $\Rightarrow$ 4. :

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a každá jeho hrana je mostom. Chceme ukázať, že $|H| = |V| - 1$.

3. $\Rightarrow$ 4. :

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a každá jeho hrana je mostom. Chceme ukázať, že $|H| = |V| - 1$.
- MI podľa podľa $n = |V|$.

3. $\Rightarrow$ 4. :

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a každá jeho hrana je mostom. Chceme ukázať, že $|H| = |V| - 1$.
- MI podľa podľa $n = |V|$.
- $n = 1$:, potom $|H| = 0 \Rightarrow G$ je strom.

3. $\Rightarrow$ 4. :

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a každá jeho hrana je mostom. Chceme ukázať, že $|H| = |V| - 1$.
- MI podľa podľa $n = |V|$.
- $n = 1$:, potom $|H| = 0 \Rightarrow G$ je strom.
- Nech platí pre všetky $G' = (V', H')$, kde $|V'| < n + 1$.

3. $\Rightarrow$ 4. :

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a každá jeho hrana je mostom. Chceme ukázať, že $|H| = |V| - 1$.
- MI podľa podľa $n = |V|$.
- $n = 1$:, potom $|H| = 0 \Rightarrow G$ je strom.
- Nech platí pre všetky $G' = (V', H')$, kde $|V'| < n + 1$.
- Nech $G = (V, H)$ je súvislý, každá jeho hrana je mostom a $|V| = n + 1$.

3. $\Rightarrow$ 4. :

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a každá jeho hrana je mostom. Chceme ukázať, že $|H| = |V| - 1$.
- MI podľa podľa $n = |V|$.
- $n = 1$:, potom $|H| = 0 \Rightarrow G$ je strom.
- Nech platí pre všetky $G' = (V', H')$, kde $|V'| < n + 1$.
- Nech $G = (V, H)$ je súvislý, každá jeho hrana je mostom a $|V| = n + 1$.
- Nech $h = uv \in H$. $G - uv$ pozostáva z dvoch komponentov $G_1 = (V_1, H_1)$, $G_2 = (V_2, H_2)$. Nech $u \in V_1$, $v \in V_2$.

3. $\Rightarrow$ 4. :

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a každá jeho hrana je mostom. Chceme ukázať, že $|H| = |V| - 1$.
- MI podľa podľa $n = |V|$.
- $n = 1$:, potom $|H| = 0 \Rightarrow G$ je strom.
- Nech platí pre všetky $G' = (V', H')$, kde $|V'| < n + 1$.
- Nech $G = (V, H)$ je súvislý, každá jeho hrana je mostom a $|V| = n + 1$.
- Nech $h = uv \in H$. $G - uv$ pozostáva z dvoch komponentov $G_1 = (V_1, H_1)$, $G_2 = (V_2, H_2)$. Nech $u \in V_1$, $v \in V_2$.
- Z IP dostávame:
 $|H_1| = |V_1| - 1$, $|H_2| = |V_2| - 1$.
A teda $|H| = |H_1| + |H_2| + 1 = |V_1| + |V_2| - 1 = |V| + 1$.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.
- 3 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.
- 4 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a $|H| = |V| - 1$.
- 5 V grafe $G = (V, H)$ platí $|H| = |V| - 1$ a G je acyklický.

4. $\Rightarrow$ 5. :

Už máme $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4.$ a teda aj $1. \Rightarrow 4.$.

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a nech $|H| = |V| - 1$.
Nepriamo ukážeme, že G je acyklický.

4. $\Rightarrow$ 5. :

Už máme $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4.$ a teda aj $1. \Rightarrow 4.$.

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a nech $|H| = |V| - 1$.
Nepriamo ukážeme, že G je acyklický.
- Ak G obsahuje cyklus, odstránime z množiny hrán H ľubovoľnú hranu cyklu h_1 . Súvislosť je zachovaná.

4. $\Rightarrow$ 5. :

Už máme $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4.$ a teda aj $1. \Rightarrow 4.$.

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a nech $|H| = |V| - 1$.
Nepriamo ukážeme, že G je acyklický.
- Ak G obsahuje cyklus, odstránime z množiny hrán H ľubovoľnú hranu cyklu h_1 . Súvislosť je zachovaná.
- Takto pokračujeme. Po odstránení k hrán dostaneme $G_k = (V, H_k)$, v ktorom je $|H_k| = |H| - k$ a ktorý je stromom:

4. $\Rightarrow$ 5. :

Už máme $1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4.$ a teda aj $1. \Rightarrow 4.$

- Nech $G = (V, H)$ je súvislý a nech $|H| = |V| - 1$.
Nepriamo ukážeme, že G je acyklický.
- Ak G obsahuje cyklus, odstránime z množiny hrán H ľubovoľnú hranu cyklu h_1 . Súvislosť je zachovaná.
- Takto pokračujeme. Po odstránení k hrán dostaneme $G_k = (V, H_k)$, v ktorom je $|H_k| = |H| - k$ a ktorý je stromom:
- $|H| - k = |H_k| = |V| - 1$ a zároveň $|H| = |V| - 1 \Rightarrow k = 0$,
t. j. v grafe G neexistuje ani jeden cyklus.

Veta

Nasledujúce tvrdenia sú ekvivalentné:

- 1 $G = (V, H)$ je strom.
- 2 V grafe $G = (V, H)$ existuje pre každé $u, v \in V$ jediná uv -cesta.
- 3 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a každá hrana množiny H je mostom.
- 4 Graf $G = (V, H)$ je súvislý a $|H| = |V| - 1$.
- 5 V grafe $G = (V, H)$ platí $|H| = |V| - 1$ a G je acyklický.

5. $\Rightarrow$ 1. :

Nech $G = (V, H)$ je acyklický a $|H| = |V| - 1$. Ukážeme, že G je súvislý. Sporom.

- Rozložme G na komponenty

$G_1 = (V_1, H_1), G_2 = (V_2, H_2), \dots, G_k = (V_k, H_k)$, kde G_i , $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ je stromom.

5. $\Rightarrow$ 1. :

Nech $G = (V, H)$ je acyklický a $|H| = |V| - 1$. Ukážeme, že G je súvislý. Sporom.

- Rozložme G na komponenty $G_1 = (V_1, H_1), G_2 = (V_2, H_2), \dots, G_k = (V_k, H_k)$, kde $G_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ je stromom.
- Platí: $|H_i| = |V_i| - 1$ a

5. $\Rightarrow$ 1. :

Nech $G = (V, H)$ je acyklický a $|H| = |V| - 1$. Ukážeme, že G je súvislý. Sporom.

- Rozložme G na komponenty
 $G_1 = (V_1, H_1), G_2 = (V_2, H_2), \dots, G_k = (V_k, H_k)$, kde G_i ,
 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ je stromom.
- Platí: $|H_i| = |V_i| - 1$ a

$$|V| = \sum_{i=1}^k |V_i| \text{ a } |H| = \sum_{i=1}^k |H_i|.$$

5. $\Rightarrow$ 1. :

Nech $G = (V, H)$ je acyklický a $|H| = |V| - 1$. Ukážeme, že G je súvislý. Sporom.

- Rozložme G na komponenty
 $G_1 = (V_1, H_1), G_2 = (V_2, H_2), \dots, G_k = (V_k, H_k)$, kde G_i ,
 $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ je stromom.
- Platí: $|H_i| = |V_i| - 1$ a

$$|V| = \sum_{i=1}^k |V_i| \quad \text{a} \quad |H| = \sum_{i=1}^k |H_i|.$$

$$|V| - 1 = |H| = \sum_{i=1}^k |H_i| = \sum_{i=1}^k (|V_i| - 1) = \sum_{i=1}^k |V_i| - \sum_{i=1}^k 1 = |V| - k$$

T.j. $k = 1$ a G má 1 komponent, G je súvislý

Definícia

Koreňový strom

Definícia

Koreňový strom je strom $T = (V, H)$ s pevne vybraným vrcholom $k \in V$, ktorý nazývame

Definícia

Koreňový strom je strom $T = (V, H)$ s pevne vybraným vrcholom $k \in V$, ktorý nazývame **koreň**. Koreňový strom budeme označovať $T = (V, H, k)$. **Úroveň vrcholu** u

Definícia

Koreňový strom je strom $T = (V, H)$ s pevne vybraným vrcholom $k \in V$, ktorý nazývame **koreň**. Koreňový strom budeme označovať $T = (V, H, k)$. **Úroveň vrcholu** u v koreňovom strome je dĺžka (počet hrán) jedinej ku-cesty. **Výška koreňového stromu**

Definícia

Koreňový strom je strom $T = (V, H)$ s pevne vybraným vrcholom $k \in V$, ktorý nazývame **koreň**. Koreňový strom budeme označovať $T = (V, H, k)$. **Úroveň vrcholu** u v koreňovom strome je dĺžka (počet hrán) jedinej ku-cesty. **Výška koreňového stromu** je maximum z úrovní všetkých vrcholov koreňového stromu T .

Definícia

Majme strom s koreňom v_0 . Nech $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ je (jediná) $v_0 v_n$ -cesta. Potom

- **predkovia**

Definícia

Majme strom s koreňom v_0 . Nech $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ je (jediná) $v_0 v_n$ -cesta. Potom

- **predkovia** vrchola v_n sú vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$.
- **otec**

Definícia

Majme strom s koreňom v_0 . Nech $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ je (jediná) $v_0 v_n$ -cesta. Potom

- **predkovia** vrchola v_n sú vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$.
- **otec** vrchola v_n je vrchol v_{n-1} .
- **syn**

Definícia

Majme strom s koreňom v_0 . Nech $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ je (jediná) $v_0 v_n$ -cesta. Potom

- **predkovia** vrchola v_n sú vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$.
- **otec** vrchola v_n je vrchol v_{n-1} .
- **syn** vrchola v_{n-1} je vrchol v_n .
- Ak je u predkom v , potom v sa volá

Definícia

Majme strom s koreňom v_0 . Nech $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ je (jediná) $v_0 v_n$ -cesta. Potom

- **predkovia** vrchola v_n sú vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$.
- **otec** vrchola v_n je vrchol v_{n-1} .
- **syn** vrchola v_{n-1} je vrchol v_n .
- Ak je u predkom v , potom v sa volá **následník**, alebo **potomok** vrcholu u .
- koncový vrchol - **list**

Definícia

Majme strom s koreňom v_0 . Nech $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ je (jediná) $v_0 v_n$ -cesta. Potom

- **predkovia** vrchola v_n sú vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$.
- **otec** vrchola v_n je vrchol v_{n-1} .
- **syn** vrchola v_{n-1} je vrchol v_n .
- Ak je u predkom v , potom v sa volá **následník**, alebo **potomok** vrcholu u .
- koncový vrchol - **list** - je vrchol bez následníka.
- **binárny koreňový strom**

Definícia

Majme strom s koreňom v_0 . Nech $v_0 v_1 v_2 \dots v_{n-1} v_n$ je (jediná) $v_0 v_n$ -cesta. Potom

- **predkovia** vrchola v_n sú vrcholy $v_0, v_1, \dots, v_{n-1}$.
- **otec** vrchola v_n je vrchol v_{n-1} .
- **syn** vrchola v_{n-1} je vrchol v_n .
- Ak je u predkom v , potom v sa volá **následník**, alebo **potomok** vrcholu u .
- koncový vrchol - **list** - je vrchol bez následníka.
- **binárny koreňový strom** je strom, v ktorom má každý vrchol najviac dvoch synov. Často sa tieto synovia označujú za ľavého a pravého.