

DETERMINANT

ŠTVOŘCOVÉ MATICI A PŘÍŘADÍME ČÍSLO, KTERÉ NAZÝVÁME DETERMINANT MATICE A , OZNAČUJEME det A ALEBO $|A|$.

NECH JE DANA ČTVERCOVÁ MATICE A . SUBDETERMINANT (MINOR) D_{ij} VZHLÁDEM NA PRVK a_{ij} MATICE A JE DETERMINANT MATICE, KTERÁ VZNIKNE VYNECHÁNÍM i -TÉHO ŘÁDKU A j -TÉHO STĚPCA V MATICI A .

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow D_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

ROZMĚR $(n \times n)$ ROZMĚR $[(n-1) \times (n-1)]$

VÝPOČET DETERMINANTU ROZMĚRU 2×2 (KŘÍŽOVÉ PRAVIDLO)

- ROZÍME TAK, ŽE OD SÚČINU PRVKŮ NA HLAVNÍ DIAGONÁLE ODEČTÁME SÚČIN PRVKŮ NA VEDLÁŽŠÍ DIAGONÁLE

PŘÍKLAD: VÝPOČÍTÁME DETERMINANT MATICE $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (5 \cdot (-4)) = 6 + 20 = \underline{\underline{26}}$$

VEDL. DIAG. HLAV. DIAG.

VÝPOČET DETERMINANTU ROZMĚRU 3×3 (SARVSOVO PRAVIDLO)

- ROZÍME TAK, ŽE SPOČÍTÁME SÚČINY PRVKŮ NA HLAVNÍ DIAGONÁLE A NA JEJ ROVNOBĚŽKÁCH A ODEČTÁME OD NICH SÚČINY PRVKŮ NA VEDLÁŽŠÍ DIAGONÁLE A JEJ ROVNOBĚŽKÁCH

PŘÍKLAD: VÝPOČÍTÁME DETERMINANT MATICE $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$|B| = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = [0 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \cdot (-3)] - [2 \cdot 2 \cdot 3 + (-3) \cdot 2 \cdot 0 + 1 \cdot 3 \cdot 1] =$$

$$= [4 - 27] - [12 + 3] = \underline{\underline{-30}}$$

POZNÁMKA: AK JE MATICE A JEDNOPRVKOVÁ, TAK HODNOTA DETERMINANTU = PŘÁVE TOMU PRVKU

$$A = (-2) \Rightarrow |A| = |-2| = \underline{\underline{-2}}$$

→ DETERMINANT, NĚ ABSOLUTNÁ HODNOTA

VÝPOČET DETERMINANTU ROZMĚRU 4×4 A VIAC

- ROZÍME PODOBNOU ROZVOJ DETERMINANTU PODĚA ŘÁDKU ALEBO PODĚA STĚPCA

1) ROZVOJ PODĚA i -TÉHO ŘÁDKU

$$|A| = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \dots + a_{in} \cdot A_{in}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

2) ROZVOJ PODĚA j -TÉHO STĚPCA

$$|A| = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \dots + a_{nj} \cdot A_{nj}$$

$$\begin{vmatrix} \dots & a_{1j} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2j} & & \\ \vdots & & \\ a_{nj} & & \end{vmatrix}$$

KDE A_{ij} JE ALGEBRAICKÝ DOPLNOK PRVKU a_{ij} , PŘE KTERÝ PLATÍ

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D_{ij}; \quad D_{ij} \text{ JE SUBDETERMINANT VZHLÁDEM NA PRVK } a_{ij} \text{ MATICE } A.$$

PŘÍKLAD: VÝPOČÍTÁME DETERMINANT MATICE $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

PŘI VÝPOČETĚ DETERMINANTU TOTO ROZMĚRU MUSÍME VYUŽÍT ROZVOJ BUĎ PODĚA LÝBOVOUČNĚHO ŘÁDKU ALEBO PODĚA STĚPCA.

VÝBERÁM SI **DRUHÝ ŘÁDEK**

$$|A| = 1 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 5 \cdot A_{24}; \quad A_{21}, A_{22}, A_{23}, A_{24} - \text{ALGEBRAICKÉ DOPLNKY K PRVKŮM } a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} \text{ MATICE } A$$

VRÁTĚME SA K VÝPOČTU CELÉHO DETERMINANTU:

$$|A| = 1 \cdot A_{21} + 4 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23} + 5 \cdot A_{24} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \times$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad A = \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 4 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+4} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -2 & -1 & 3 \\ 3 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 1 \cdot (-1) \cdot 30 + 4 \cdot (+1) \cdot 7 + 0 \cdot (-1) \cdot 20 + 5 \cdot (+1) \cdot 18 = \\ &= \underline{\underline{88}} \end{aligned}$$