

GAaDO

Dirichletov princíp

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Dirichletov princíp (zásuvkový, priehradkový, holubníkový) je matematické tvrdenie z teórie množín, resp. kombinatoriky. Na rozdiel od typov dôkazov v predchádzajúcej kapitole nám tento princíp dáva iba odpoveď ÁNO/NIE. Nedáva konkrétne riešenie.

Jednoduchá a všeobecná verzia:

Veta (Jednoduchá verzia)

Nech $n, k \in \mathbb{N}$. Ak n je počet holubov a k je počet kliebok, pričom $k < n$, tak po rozmiestnení všetkých holubov do kliebok sú aspoň v jednej klietke aspoň dva holuby.

Jednoduchá a všeobecná verzia:

Veta (Jednoduchá verzia)

Nech $n, k \in \mathbb{N}$. Ak n je počet holubov a k je počet kliebok, pričom $k < n$, tak po rozmiestnení všetkých holubov do kliebok sú aspoň v jednej kliebke aspoň dva holuby.

Veta (Všeobecná verzia:)

Nech $n, m \in \mathbb{N}$. Ak je viac ako mn holubov rozdelených do n kliebok, tak aspoň v jednej kliebke je viac ako m holubov.

Veta (Zložitejšia verzia:)

Nech f je funkcia z konečnej množiny X do konečnej množiny Y ($f : X \rightarrow Y$).

Nech $|X| = n$, $|Y| = m$ a $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$.

Potom existuje aspoň k hodnôt $a_1, a_2, \dots, a_k \in X$ takých, že $f(a_1) = f(a_2) = \dots = f(a_k)$.

Dôkaz

- *Nech*

- $f : X \rightarrow Y$
- $|X| = n, |Y| = m, k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$
- $Y = \{y_1, y_1, \dots, y_m\}$.

Dôkaz

- *Nech*
 - $f : X \rightarrow Y$
 - $|X| = n, |Y| = m, k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$
 - $Y = \{y_1, y_1, \dots, y_m\}$.
- *Sporom:* $(\forall i = 1, 2, \dots, m) (\exists \text{ najviac } (k - 1) \text{ prvkov } x \in X) : f(x) = y_i$.

Dôkaz

- *Nech*
 - $f : X \rightarrow Y$
 - $|X| = n, |Y| = m, k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$
 - $Y = \{y_1, y_1, \dots, y_m\}$.
- *Sporom:* $(\forall i = 1, 2, \dots, m) (\exists \text{ najviac } (k - 1) \text{ prvkov } x \in X) : f(x) = y_i$.
- $D(f) = |X| \leq m(k - 1)$.
Z predpokladu $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ vyplýva, že $k - 1 < \frac{n}{m}$. Potom

Dôkaz

- *Nech*
 - $f : X \rightarrow Y$
 - $|X| = n, |Y| = m, k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$
 - $Y = \{y_1, y_1, \dots, y_m\}$.
- *Sporom:* $(\forall i = 1, 2, \dots, m) (\exists \text{ najviac } (k - 1) \text{ prvkov } x \in X) : f(x) = y_i$.
- $D(f) = |X| \leq m(k - 1)$.
Z predpokladu $k = \lceil \frac{n}{m} \rceil$ vyplýva, že $k - 1 < \frac{n}{m}$. Potom

$$m(k - 1) < m \frac{n}{m} = n,$$

čo je v spore s tým, že $|X| = n$.

Príklad

Konferencie sa zúčastnilo 70 delegátov, ktorí hovoria 11 rôznymi jazykmi. Jedným jazykom hovorí najviac 15 delegátov. Organizačný výbor rozhodol, že za oficiálny bude považovať taký jazyk, ktorým hovorí najmenej 5 delegátov. Dokážte, že na konferencii boli aspoň 3 oficiálne jazyky.

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,

Príklad - riešenie

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),
- jazykom A hovorí najviac 15 delegátov

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),
- jazykom A hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov,

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),
- jazykom A hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov,
- existuje jazyk (ozn. B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov - druhý oficiálny jazyk

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),
- jazykom A hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov,
- existuje jazyk (ozn. B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov - druhý oficiálny jazyk
- jazykom B hovorí najviac 15 delegátov

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),
- jazykom A hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov,
- existuje jazyk (ozn. B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov - druhý oficiálny jazyk
- jazykom B hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 9 jazykmi hovorí aspoň 40 delegátov.

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),
- jazykom A hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov,
- existuje jazyk (ozn. B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov - druhý oficiálny jazyk
- jazykom B hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 9 jazykmi hovorí aspoň 40 delegátov.
- opäť možno z 9 jazykov vybrať jeden oficiálny.

- 70 delegátov hovorí 11 jazykmi $\Rightarrow$ aspoň 1 jazykom hovorí aspoň 5 delegátov,
- existuje aspoň jeden oficiálny jazyk (ozn. A),
- jazykom A hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 10 jazykmi hovorí aspoň 55 delegátov,
- existuje jazyk (ozn. B), ktorým hovorí najmenej 5 delegátov - druhý oficiálny jazyk
- jazykom B hovorí najviac 15 delegátov $\Rightarrow$ 9 jazykmi hovorí aspoň 40 delegátov.
- opäť možno z 9 jazykov vybrať jeden oficiálny.

Existenciu štyroch oficiálnych jazykov nie je možné dokázať.

- 1 Na škole je 1000 žiakov a 30 tried. Dá sa dokázať, že aspoň v jednej triede bude aspoň 34 žiakov?
- 2 V triede je 33 žiakov. Jeden žiak urobil v diktáte 15 chýb. Nikto nemal viac. Majú aspoň traja žiaci taký istý počet chýb? A štyria žiaci?
- 3 Koľko musí byť v skupine ľudí, aby sme mohli povedať, že aspoň dvaja
 - a) sa narodili v rovnakom dni v týždni.
 - b) sa narodili v rovnakom mesiaci.
 - c) majú narodeniny v rovnakom dni v roku?
- 4 V pravidelnom dvadsaťuholníku je 9 vrcholov vyznačených zlatou farbou. Dokážte, že aspoň tri z nich tvoria rovnoramenný trojuholník.

- 1 V rovine vyberáme niekoľko bodov s celočíselnými súradnicami. Spojíme ich úsečkami a určíme stredy týchto úsečiek. Koľko musíme vziať bodov, aby aspoň jeden stred úsečky mal celočíselné súradnice?
- 2 V kocke s hranou 19 cm je 1332 bodov. Dokážte, že sú medzi nimi aspoň 2 body, ktoré majú vzdialenosť menšiu než 3.
- 3 Cestovná kancelária skúmala podmienky šiestich miest a zistila, že každé dve z nich majú medzi sebou buď autobusové alebo vlakové spojenie (ale nikdy nie obe). Môžeme z toho usúdiť, že aspoň tri z týchto miest sú vzájomne prepojené rovnakým druhom dopravy?