

GAaDO

Grafy a digrafy

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Definícia

Grafom G nazveme usporiadanú dvojicu $G = (V, H)$, kde V je konečná množina a H je množina neusporiadaných dvojíc typu $\{u, v\}$, kde $u, v \in V$ a $u \neq v$.

Definícia

Digrafom $\vec{G}$ nazveme usporiadanú dvojicu $\vec{G} = (V, H)$, kde V je neprázdna, konečná množina a H je množina usporiadaných dvojíc typu (u, v) , kde $u, v \in V$ a $u \neq v$.

- 1 Prvky množiny V nazýváme **vrcholy**,

- 1 Prvky množiny V nazýváme **vrcholy**,
- 2 prvky množiny H **(orientované) hrany**, ozn. uv ($\overrightarrow{uv}$),

- 1 Prvky množiny V nazývame **vrcholy**,
- 2 prvky množiny H **(orientované) hrany**, ozn. uv ($\overrightarrow{uv}$),
- 3 ozn. $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ ($n = |V(\vec{G})|$, $m = |E(\vec{G})|$),

- 1 Prvky množiny V nazýváme **vrcholy**,
- 2 prvky množiny H **(orientované) hrany**, ozn. uv ($\overrightarrow{uv}$),
- 3 ozn. $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ ($n = |V(\vec{G})|$, $m = |E(\vec{G})|$),
- 4 V nazýváme **vrcholová množina** grafu,

- 1 Prvky množiny V nazývame **vrcholy**,
- 2 prvky množiny H **(orientované) hrany**, ozn. uv ($\overrightarrow{uv}$),
- 3 ozn. $n = |V(G)|$, $m = |E(G)|$ ($n = |V(\vec{G})|$, $m = |E(\vec{G})|$),
- 4 V nazývame **vrcholová množina** grafu,
- 5 H nazývame **hranová množina** grafu.

Definícia

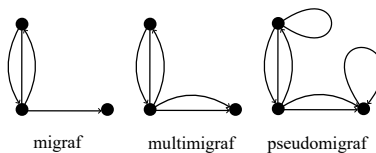
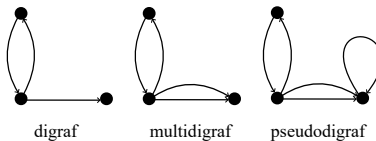
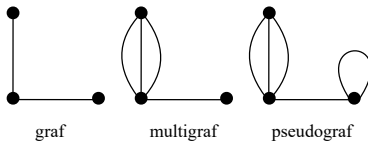
Diagram grafu $G = (V, H)$ v priestore P je množina bodov B a množina súvislých čiar S v priestore P takých, že:

- $\forall u, v \in V : u \neq v \Leftrightarrow b_u \neq b_v$.
- $\forall g, h \in H : g \neq h \Leftrightarrow s_g \neq s_h$.
- nech $h = uv \in H$, potom čiara s_h má koncové body b_u, b_v . Okrem koncových bodov žiadna čiara neobsahuje žiaden bod typu $b_w \in B, w \neq u, v$.
- žiadna čiara samu seba nepretína a dve čiary majú najviac jeden priesečník.

Definícia

*Diagram grafu, resp. digrafu v rovine nazveme **rovinný** (planárny), ak sa jeho hrany nepretínajú nikde inde okrem vrcholov. Graf $G = (V, H)$, resp. digraf $\vec{G} = (V, H)$ nazveme **rovinný** (planárny), ak k nemu existuje rovinný diagram.*

Grafové štruktúry



Definícia

*Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u, v \in V$, pričom $h = uv \in H$. Vrchol u nazývame **incidentný** s hranou, ak je jedným z koncových vrcholov hrany h . V tomto prípade hovoríme, že vrcholy u, v sú **susedné**.*

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u, v \in V$, pričom $h = uv \in H$. Vrchol u nazývame **incidentný** s hranou, ak je jedným z koncových vrcholov hrany h . V tomto prípade hovoríme, že vrcholy u, v sú **susedné**.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u \in V$. **Stupeň vrcholu** u (ozn. $\deg_G(u)$) je počet hrán s ktorými je vrchol u incidentný.

Základné definície

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u, v \in V$, pričom $h = uv \in H$. Vrchol u nazývame **incidentný** s hranou, ak je jedným z koncových vrcholov hrany h . V tomto prípade hovoríme, že vrcholy u, v sú **susedné**.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u \in V$. **Stupeň vrcholu** u (ozn. $\deg_G(u)$) je počet hrán s ktorými je vrchol u incidentný.

Definícia

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf a nech $u \in V$. **Vonkajší** (výstupný) **stupeň vrcholu** u (ozn. $\text{odeg}_G(u)$, resp. $\deg_-(u)$) je počet hrán vystupujúcich z vrcholu u . Analogický **vnútorný** (vstupný) **stupeň vrcholu** u (ozn. $\text{ideg}_G(u)$, resp. $\deg_+(u)$) je počet hrán vstupujúcich do vrcholu u .

Definícia

*Vrchol stupňa 0 nazývame **izolovaný** vrchol.*

Definícia

Vrchol stupňa 0 nazývame **izolovaný** vrchol.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú dva grafy. Hovoríme, že graf G je **komplement** grafu G^* , ak $V = V^*$ a $(\forall u, v \in V) : uv \in H \Leftrightarrow uv \notin H^*$.

Definícia

Vrchol stupňa 0 nazývame **izolovaný** vrchol.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú dva grafy. Hovoríme, že graf G je **komplement** grafu G^* , ak $V = V^*$ a $(\forall u, v \in V) : uv \in H \Leftrightarrow uv \notin H^*$.

Definícia

Graf $G = (V, H)$ sa nazýva **autokomplementárny**, ak je izomorfný so svojim komplementom.

Veta (Prvá matematická veta-Euler)

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|H|$.

Veta (Prvá matematická veta-Euler)

Nech $G = (V, H)$ je graf. Potom $\sum_{v \in V} \deg_G(v) = 2|H|$.

Veta

Nech $G = (V, H)$ je graf s aspoň dvoma vrcholmi. Potom V obsahuje aspoň dva vrcholy rovnakého stupňa.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú dva rôzne grafy.
Hovoríme, že graf G je **izomorfný** s grafom ozn. G^* ($G \cong G^*$)
ak existuje také jednoznačné zobrazenie $f : V \rightarrow V^*$, že
 $(\forall u, v \in V) : uv \in H \Leftrightarrow f(u)f(v) \in H^*$.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú dva rôzne grafy.
Hovoríme, že graf G je **izomorfný** s grafom ozn. G^* ($G \cong G^*$)
ak existuje také jednoznačné zobrazenie $f : V \rightarrow V^*$, že
 $(\forall u, v \in V) : uv \in H \Leftrightarrow f(u)f(v) \in H^*$.

Problém izomorfizmu grafov patrí medzi NP-úplne problémy.

Ďalšie definície

Definícia

Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú dva rôzne grafy.
Hovoríme, že graf G je **izomorfný** s grafom ozn. G^* ($G \cong G^*$) ak existuje také jednoznačné zobrazenie $f : V \rightarrow V^*$, že $(\forall u, v \in V) : uv \in H \Leftrightarrow f(u)f(v) \in H^*$.

Problém izomorfizmu grafov patrí medzi NP-úplne problémy.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf, $|V| = n$ a $V = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$.
Postupnosť stupňov vrcholov $\deg_G(v_1), \deg_G(v_2), \deg_G(v_3), \dots, \deg_G(v_n)$ nazývame **grafová postupnosť** grafu G .

minimálny stupeň grafu, ozn. $\delta(G)$

maximálny stupeň grafu, ozn. $\Delta(G)$

- **prázdny:**

Základne typy grafov

- **prázdny:** $V = \emptyset$,
- **triviálny:**

Základné typy grafov

- **prázdny:** $V = \emptyset$,
- **triviálny:** $V = \{u\}$,
- **diskrétny:**

Základne typy grafov

- **prázdný:** $V = \emptyset$,
- **triviálny:** $V = \{u\}$,
- **diskrétny:** $V \neq \emptyset$ a $H = \emptyset$, ozn. D_n ,
- **k -regulárny:**

Základne typy grafov

- **prázdný:** $V = \emptyset$,
- **triviálny:** $V = \{u\}$,
- **diskrétny:** $V \neq \emptyset$ a $H = \emptyset$, ozn. D_n ,
- **k -regulárny:** každý vrchol je stupňa k . Ak $k = 3$ graf nazývame **kubický**,
- **kompletný:**

Základne typy grafov

- **prázdný:** $V = \emptyset$,
- **triviálny:** $V = \{u\}$,
- **diskrétny:** $V \neq \emptyset$ a $H = \emptyset$, ozn. D_n ,
- **k -regulárny:** každý vrchol je stupňa k . Ak $k = 3$ graf nazývame **kubický**,
- **kompletný:** $(\forall u, v \in V) : uv \in H$, ozn. K_n ,
- **bipartitný:**

Základne typy grafov

- **prázdný:** $V = \emptyset$,
- **triviálny:** $V = \{u\}$,
- **diskrétny:** $V \neq \emptyset$ a $H = \emptyset$, ozn. D_n ,
- **k -regulárny:** každý vrchol je stupňa k . Ak $k = 3$ graf nazývame **kubický**,
- **kompletný:** $(\forall u, v \in V) : uv \in H$, ozn. K_n ,
- **bipartitný:** $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ a $(\forall uv \in H) : u \in V_1$ a $v \in V_2$,
- **kompletný bipartitný:**

- **prázdný:** $V = \emptyset$,
- **triviálny:** $V = \{u\}$,
- **diskrétny:** $V \neq \emptyset$ a $H = \emptyset$, ozn. D_n ,
- **k -regulárny:** každý vrchol je stupňa k . Ak $k = 3$ graf nazývame **kubický**,
- **kompletný:** $(\forall u, v \in V) : uv \in H$, ozn. K_n ,
- **bipartitný:** $V = V_1 \cup V_2$, $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ a $(\forall uv \in H) : u \in V_1$ a $v \in V_2$,
- **kompletný bipartitný:** ak je bipartitný a navyše $(\forall u \in V_1)$ a $(\forall v \in V_2)$ existuje hrana $uv \in H$, ozn. $K_{n,m}$.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú grafy. Hovoríme, že graf G^* je **podgraf** grafu G ($G^* \subseteq G$) ak platí: $V^* \subseteq V$ a $H^* \subseteq H$.

- **Faktorový podgraf** grafu G : $V^* = V$ a $H^* \subseteq H$.
- **Indukovaný podgraf** grafu G na množine V^* : G^* je maximálny podgraf grafu G s množinou vrcholov V^* .

Definícia

Nech $G = (V, H)$ a $G^* = (V^*, H^*)$ sú grafy. Hovoríme, že graf G^* je **podgraf** grafu G ($G^* \subseteq G$) ak platí: $V^* \subseteq V$ a $H^* \subseteq H$.

- **Faktorový podgraf** grafu G : $V^* = V$ a $H^* \subseteq H$.
- **Indukovaný podgraf** grafu G na množine V^* : G^* je maximálny podgraf grafu G s množinou vrcholov V^* .

Definícia

Graf $G = (V, H)$ ($\vec{G} = (V, H)$) nazveme **hranovo ohodnoteným**, ak každej (orientovanej) hrane $h \in H$ je priradené reálne číslo $c(h)$ nazývané cena (ohodnotenie) hrany h , ozn. $G = (V, H, c)$, kde V je množina vrcholov, H množina hrán a $c : H \rightarrow \mathbb{R}$ je reálna funkcia definovaná na množine H .

Podobne možno definovať vrcholovo ohodnotený graf (digraf).