

GAaDO

Najkratšia cesta

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Definícia

*Nech $G = (V, H)$ je graf a nech pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje postupnosť $u = v_0 h_1 v_1 h_2 \dots v_k h_{k+1} v_{k+1} = v$, kde $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : v_i \in V$ a $h_i \in H$, pričom $h_{i+1} = v_i v_{i+1}$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** v grafe G .*

Definícia

*Nech $G = (V, H)$ je graf a nech pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje postupnosť $u = v_0 h_1 v_1 h_2 \dots v_k h_{k+1} v_{k+1} = v$, kde $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : v_i \in V$ a $h_i \in H$, pričom $h_{i+1} = v_i v_{i+1}$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** v grafe G .*

- **Uzavretý** sled: $u = v$.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje postupnosť $u = v_0 h_1 v_1 h_2 \dots v_k h_{k+1} v_{k+1} = v$, kde $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : v_i \in V$ a $h_i \in H$, pričom $h_{i+1} = v_i v_{i+1}$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** v grafe G .

- **Uzavretý** sled: $u = v$.
- **Dĺžka sledu**: počet hrán, ktoré sled obsahuje.

Definícia

*Nech $G = (V, H)$ je graf a nech pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje postupnosť $u = v_0 h_1 v_1 h_2 \dots v_k h_{k+1} v_{k+1} = v$, kde $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : v_i \in V$ a $h_i \in H$, pričom $h_{i+1} = v_i v_{i+1}$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** v grafe G .*

- **Uzavretý** sled: $u = v$.
- **Dĺžka sledu**: počet hrán, ktoré sled obsahuje.
- **Ťah** (uzavretý ťah): všetky hrany navzájom rôzne.

Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje postupnosť $u = v_0 h_1 v_1 h_2 \dots v_k h_{k+1} v_{k+1} = v$, kde $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : v_i \in V$ a $h_i \in H$, pričom $h_{i+1} = v_i v_{i+1}$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** v grafe G .

- **Uzavretý** sled: $u = v$.
- **Dĺžka sledu**: počet hrán, ktoré sled obsahuje.
- **Ťah** (uzavretý ťah): všetky hrany navzájom rôzne.
- **Cesta**: všetky vrcholy navzájom rôzne.

Definícia

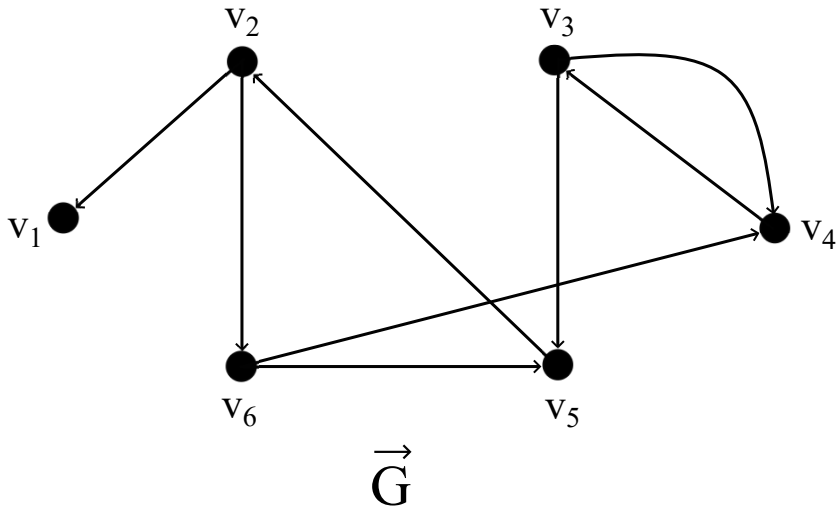
Nech $G = (V, H)$ je graf a nech pre dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje postupnosť $u = v_0 h_1 v_1 h_2 \dots v_k h_{k+1} v_{k+1} = v$, kde $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\} : v_i \in V$ a $h_i \in H$, pričom $h_{i+1} = v_i v_{i+1}$. Takúto postupnosť nazývame **sledom** v grafe G .

- **Uzavretý** sled: $u = v$.
- **Dĺžka sledu**: počet hrán, ktoré sled obsahuje.
- **Ťah** (uzavretý ťah): všetky hrany navzájom rôzne.
- **Cesta**: všetky vrcholy navzájom rôzne.
- **Kružnica**: uzavretá cesta.

Pri orientovaných grafoch rozlišujeme pojmy:

Na orientácii hrán záleží	Na orientácii hrán nezáleží
sled (spojenie) ťah cesta (dráha) cyklus (kružnica)	polosled poloťah polocesta polocyklus

Základné definície



Definícia

Nech $G = (V, H)$ je graf (resp. digraf) a nech $u, v \in V, u \neq v$. Hovoríme, že vrchol v je **dosiahnuteľný** z vrchola u , ak v G existuje uv -sled.

Veta

Nech $G = (V, H)$ je graf a nech $u, v \in V, u \neq v$. Ak v grafe G existuje uv -sled, tak v G existuje aj uv -cesta.

Definícia

Hovoríme, že graf $G = (V, H)$ je **súvislý**, ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje uv -cesta. Inak hovoríme, že graf G je **nesúvislý**.

Definícia

Komponent grafu $G = (V, H)$ je jeho ľubovoľný maximálny súvislý podgraf.

Definícia

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf. Povieme, že digraf $\vec{G}$ je:

- **slabo súvislý** (resp. neorientovane súvislý) ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v G uv -polosled; inak hovoríme, že digraf $\vec{G}$ je **nesúvislý**.
- **jednostranne súvislý** (resp. orientovane súvislý), ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v $\vec{G}$ uv -sled alebo vu -sled.
- **silne súvislý**, ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje aj uv -sled aj vu -sled.

Definícia

Nech $\vec{G} = (V, H)$ je digraf. Povieme, že digraf $\vec{G}$ je:

- **slabo súvislý** (resp. neorientovane súvislý) ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v G uv -polosled; inak hovoríme, že digraf $\vec{G}$ je **nesúvislý**.
- **jednostranne súvislý** (resp. orientovane súvislý), ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje v $\vec{G}$ uv -sled alebo vu -sled.
- **silne súvislý**, ak pre každú dvojicu vrcholov $u, v \in V$ existuje aj uv -sled aj vu -sled.

Definícia

Komponent digrafu $\vec{G}$ je maximálny slabo súvislý podgraf digrafu $\vec{G}$.

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf (resp. silne súvislý ohodnotený digraf) a $c(h) > 0$ pre všetky $h \in H$. Nech S je uv-sled (resp. orientovaný sled, resp. polosled).

***Dĺžkou sledu** (polosledu) S alebo tiež **cenou sledu** (polosledu) nazveme súčet ohodnotení jeho hrán, pričom ohodnotenie každej hrany započítavame toľkokrát, koľkokrát sa táto hrana v slede vyskytuje. Dĺžku sledu S budeme označovať $d(S)$.*

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf (resp. silne súvislý ohodnotený digraf) a $c(h) > 0$ pre všetky $h \in H$.
Nech S je uv-sled (resp. orientovaný sled, resp. polosled).

Dĺžkou sledu (polosledu) S alebo tiež **cenou sledu** (polosledu) nazveme súčet ohodnotení jeho hrán, pričom ohodnotenie každej hrany započítavame toľkokrát, koľkokrát sa táto hrana v slede vyskytuje. Dĺžku sledu S budeme označovať $d(S)$.

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf, alebo silne súvislý ohodnotený digraf a $c(h) > 0$ pre všetky $h \in H$.

Vzdialenosť vrcholov $u, v \in V$, ozn. $d(u, v)$ je dĺžka najkratšej uv-cesty.

Veta

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf, kde $c(h) > 0$, pre každú hranu $h \in H$. Potom funkcia vzdialenosti $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je metrikou na množine V .

Veta

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf, kde $c(h) > 0$, pre každú hranu $h \in H$. Potom funkcia vzdialenosti $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je metrikou na množine V .

Metrika:

- Pre každé $u, v \in V$ je $d(u, v) \geq 0$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $u = v$.

Veta

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf, kde $c(h) > 0$, pre každú hranu $h \in H$. Potom funkcia vzdialenosti $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je metrikou na množine V .

Metrika:

- Pre každé $u, v \in V$ je $d(u, v) \geq 0$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $u = v$.
- Pre každé $u, v \in V$ platí $d(u, v) = d(v, u)$.

Veta

Nech $G = (V, H, c)$ je súvislý hranovo ohodnotený graf, kde $c(h) > 0$, pre každú hranu $h \in H$. Potom funkcia vzdialenosti $d : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ je metrikou na množine V .

Metrika:

- Pre každé $u, v \in V$ je $d(u, v) \geq 0$ a rovnosť nastáva práve vtedy, keď $u = v$.
- Pre každé $u, v \in V$ platí $d(u, v) = d(v, u)$.
- Pre každé $u, v, w \in V$, je $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$.

Definícia

Nech $G = (V, H, c)$ je hranovo ohodnotený graf, kde $c(h) > 0$.
Potom:

- **excentricita** vrchola $v \in V$ je:
$$e(v) = \max\{d(u, v) : u \in V\},$$
- **polomer** (radius) grafu G je: $r(G) = \min\{e(v) : v \in V\},$
- **priemer** (diameter) grafu G je: $d(G) = \max\{e(v) : v \in V\}.$

Každý vrchol grafu G s minimálnou excentricitou $e(v)$ nazveme **centrálnym** vrcholom grafu G a podgraf indukovaný na množine všetkých centrálnych vrcholov grafu nazveme **centrum** grafu G .