

Technická univerzita v Košiciach



MATEMATIKA I. v príkladoch
pre aplikovanú informatiku
2. časť

Mária Timková

Košice 2025

Obsah

1	Množiny	3
2	Binárne relácie	7
3	Zobrazenia	15
4	Výroková logika	19
5	Boolovske funkcie	27

Kapitola 1

Množiny

1. Vypíšte všetky prvky množiny

(a) $A = \{x \in \mathbb{N}; -13 < -2x - 1 \leq 3 \text{ a } x \text{ je párne}\}$

(b) $B = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 0 \pmod{4}\},$

(c) $C = \{x \in \mathbb{Q}; 3x + 1 = x + 5\},$

(d) $D = \{x \in \mathbb{Z}; x^2 < 16\},$

(e) $E = \{x \in \mathbb{N}; 3x = 5\},$

(f) $F = \{x \in \mathbb{R}; x = \sqrt{n}, \text{ pre } n \in \mathbb{N} \text{ a } n \leq 10\}.$

2. Nech $A = \{x \in \mathbb{Z}; x \equiv 0 \pmod{2}\}$, $B = \{x \in \mathbb{N}; x \leq 5\}$,
 $C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$. Vypíšte všetky prvky množiny D , ak

(a) $D = A \cup B \cup C,$

(b) $D = A \cap B \cap C,$

(c) $D = A \cap (C - B),$

(d) $D = (A \cap B) \div C,$

(e) $D = C \div (C \div B).$

3. Nech $A = (-\infty, 2)$, $B = \langle -3, \infty)$, $C = \langle -5, 4)$, $D = (-1, 3)$. Napíšte, čomu sa rovná množina E , ak

(a) $E = A \cup B \cup C \cup D,$

(b) $E = A \cap B \cap C \cap D,$

(c) $E = D \cap (C - B),$

(d) $E = A \cap (B \cup C),$

(e) $E = (C - D) \cap B,$

- (f) $E = A \cap (C - B)$.
4. Vypíšte všetky prvky potenčnej množiny $\mathcal{P}(A)$, ak
- (a) $A = \{1, 2\}$,
 - (b) $A = \{x, y, z\}$,
 - (c) $A = \{a, b, c, d\}$.
5. Koľko existuje rôznych rozkladov množiny A ? Napíšte ich všetky, ak
- (a) $A = \{1, 2\}$,
 - (b) $A = \{a, b, c\}$.
6. Nech A, B, C sú ľubovoľné množiny. Dokážte, že platí:
- (a) $A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$,
 - (b) $A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C) = (A \cap B) - C$,
 - (c) $A = (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B})$,
 - (d) $A - (B - C) = (A - B) \cup (A \cap C)$,
 - (e) $(A \cap C) - (B \cap C) = (A - B) \cap C$,
 - (f) $A - (B \cup C) = A \cap \overline{B} \cap \overline{C}$,
 - (g) $A - (B \cup C) \neq (A - B) \cup (A - C)$,
 - (h) $A - (B - C) \neq (A - B) - C$,
 - (i) $A \cap (B \div C) = (A \cap B) \div (A \cap C)$,
 - (j) $(B \div C) - A = (B - A) \div (C - A)$,
 - (k) $A \div B \div (A \cap B) = A \cup B = (A \div B) \cup (A \cap B)$.
7. Nájdite infimum, supremum, minimum a maximum (ak existuje!) množiny M , ak
- (a) $M = (-1, 1)$,
 - (b) $M = (-1, 2) \cup (3, 4)$,
 - (c) $M = (-\sqrt{2}, \sqrt{3})$,
 - (d) $M = (\pi, \infty)$,
 - (e) $M = \langle 0, 1 \rangle \cap \mathbb{Q}$,
 - (f) $M = (0, 1) \cup \mathbb{Q}$,
 - (g) $M = \{x : x = \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$,
 - (h) $M = \{x : x = \frac{10n-1}{n}, n \in \mathbb{N}\}$,

- (i) $M = \{x : x = 5 + \frac{n}{n+1}, n \in \mathbb{N}\},$
- (j) $M = \{x : x^2 < 5, x \in \mathbb{R}\},$
- (k) $M = \{0, 2; 0, 22; 0, 222; 0, 2222; \dots\}.$

Výsledky:

1. (a) $A = \{2, 4\}$
 (b) $B = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, \dots\}$
 (c) $C = \{2\}$
 (d) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$
 (e) $E = \emptyset$
 (f) $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5}, \sqrt{6}, \sqrt{7}, \sqrt{8}, 3, \sqrt{10}\}$
2. (a) $D = \{\dots, -8, -6, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, \dots\}$
 (b) $D = \{2\}$
 (c) $D = \{-2, 0\}$
 (d) $D = \{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 4\}$
 (e) $D = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
3. (a) $E = (-\infty, \infty) = \mathbb{R}$
 (b) $E = (-1, 2)$
 (c) $E = \emptyset$
 (d) $E = \langle -5, 2 \rangle$
 (e) $E = \langle -3, -1 \rangle \cup (3, \infty)$
 (f) $E = \langle -5, -3 \rangle$
4. (a) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\},$
 (b) $\{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\},$
 (c) $\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{a, d\}, \{b, c\}, \{b, d\}, \{c, d\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}, \{a, c, d\}, \{b, c, d\}, \{a, b, c, d\}\}.$
5. (a) existujú dva rozklady a to $\{\{\emptyset, \{1, 2\}\}, \{\{1\}, \{2\}\}$
 (b) existuje päť rozkladov a to: $\{\{\emptyset, \{a, b, c\}\}, \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}, \{\{a\}, \{b, c\}\}, \{\{b\}, \{a, c\}\}, \{\{c\}, \{a, b\}\}$
6. Riešenie môžete nájsť pomocou Vennových diagramov.

7. (a) $\inf(M) = -1$, $\min(M)$ neex., $\sup(M) = \max(M) = 1$,
 (b) $\inf(M) = -1$, $\min(M)$ neex., $\sup(M) = 4$, $\max(M)$ neex.,
 (c) $\inf(M) = -\sqrt{2}$, $\min(M)$ neex., $\sup(M) = \sqrt{3}$, $\max(M)$ neex.,
 (d) $\inf(M) = \pi$, $\sup(M)$ neex., $\min(M)$ neex., $\max(M)$ neex.,
 (e) $\inf(M) = 0$, $\min(M) = 0$, $\sup(M) = 1$, $\max(M) = 0$,
 (f) $\inf(M)$ neex., $\min(M)$ neex., $\sup(M)$ neexis., $\max(M)$ neex.,
 (g) $\inf(M) = 0$, $\min(M)$ neex., $\sup(M) = 1$, $\max(M) = 1$,
 (h) $\inf(M) = 9$, $\min(M) = 9$, $\sup(M) = 10$, $\max(M)$ neex.,
 (i) $\inf(M) = \frac{11}{2}$, $\min(M) = \frac{11}{2}$, $\sup(M) = 6$, $\max(M)$ neex.,
 (j) $\inf(M) = -\sqrt{5}$, $\min(M)$ neex., $\sup(M) = \sqrt{5}$, $\max(M)$ neex.,
 (k) $\inf(M) = 0, 2$, $\min(M) = 0, 2$, $\sup(M) = \frac{2}{9}$, $\max(M)$ neex..

Kapitola 2

Binárne relácie

1. Nech $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{a, b\}$. Napíšte všetky prvky množiny K , ak
 - (a) $K = A \times B$,
 - (b) $K = A^2$,
 - (c) $K = B^3$,
 - (d) $K = (A \times B) \times B$,
 - (e) $K = A \times B \times B$,
 - (f) $K = A \times (B \times B)$.
2. Koľko existuje rôznych binárnych relácií na množine A , ak $A = \{1, 2\}$. Vypíšte ich všetky.
3. Na množine $X = \{1, 2, 3, 4\}$ sú dané relácie $\mathcal{R}_1 = \{(1, 1); (1, 2); (2, 4); (3, 4); (4, 2)\}$ a $\mathcal{R}_2 = \{(1, 1); (2, 1); (2, 2); (4, 4)\}$. Zostrojte reláciu $\mathcal{S}$, ak
 - (a) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_1$,
 - (b) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1 \circ \mathcal{R}_2$,
 - (c) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_1$,
 - (d) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_2 \circ \mathcal{R}_2$,
 - (e) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_1^{-1}$,
 - (f) $\mathcal{S} = \mathcal{R}_2^{-1}$.

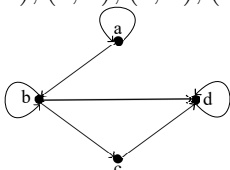
Relácie zapíšte výpisom všetkých prvkov.

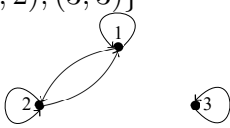
4. Vypíšte všetky prvky, nakreslite orientovaný graf a napíšte maticu relácie $\mathcal{R}$ ak
 - (a) $\mathcal{R} = \{(a, a); (a, b); (b, b); (b, c); (b, d); (c, d); (d, d)\}$, $M = \{a, b, c, d\}$,

- (b) $\mathcal{R} = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3)\}$, $M = \{1, 2, 3\}$,
 - (c) $\mathcal{R} = \{(1, 1); (2, 3); (3, 4); (4, 1)\}$, $M = \{1, 2, 3, 4\}$,
 - (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : x + y \leq 1\}$, $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 - (e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : x \leq y\}$, $M = \{0, 1, 2\}$,
 - (f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : |x - y| \leq 4\}$, $M = \{1, 5, 8, 11, 15\}$,
 - (g) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : |x - y| \geq 2\}$, $M = \{4, 5, 6, 8, 9\}$,
 - (h) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : {}^3/(x-y)\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$,
 - (i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : {}^3/(y-x)\}$, $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,
 - (j) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : {}^4/(x+y)\}$, $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 - (k) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : x - y \equiv 0 \pmod{2}\}$, $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 - (l) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : {}^x/(x-y)\}$, $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$,
 - (m) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : x + y \text{ je nepárne číslo}\}$, $M = \{1, 2, 5, 6, 7\}$.
5. Overte, či relácie $\mathcal{R}$ z predchádzajúceho príkladu sú reflexívne, symetrické, antisymetrické a tranzitívne. Rozhodnite, či sa jedná o čiastočne usporiadané množiny.
6. Overte či relácie $\mathcal{R}$ z príkladu 4 sú reláciami ekvivalencie? Pre každú ekvivalenciu nájdite príslušný rozklad množiny M určený touto reláciou.
7. Overte, či relácia $\mathcal{R}$ je reflexívna, symetrická, antisymetrická, tranzitívna a rozhodnite, či sa jedná o reláciu ekvivalencie, alebo čiastočne usporiadanú množinu, ak
- (a) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x^2\}$,
 - (b) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x - 5\}$,
 - (c) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x + 3y \leq 12\}$,
 - (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : |x - y| \geq 4\}$,
 - (e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : {}^x/y\}$,
 - (f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : {}^x/y\}$,
 - (g) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x + y \text{ je párne}\}$,
 - (h) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \cdot y \equiv 1 \pmod{2}\}$,
 - (i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 4x \equiv y \pmod{3}\}$,
 - (j) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : x \equiv y \pmod{4}\}$,
 - (k) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \text{NSD}(x, y) = 1\}$.

Výsledky:

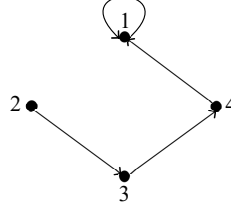
1. (a) $\{(1, a); (1, b); (2, a); (2, b); (3, a); (3, b); (4, a); (4, b)\}$
 (b) $\{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (2, 1); (2, 2); (2, 3); (2, 4); (3, 1); (3, 2); (3, 3); (3, 4); (4, 1); (4, 2); (4, 3); (4, 4)\}$
 (c) $\{(a, a, a); (a, a, b); (a, b, a); (b, a, a); (a, b, b); (b, a, b); (b, b, a); (b, b, b)\}$
 (d) $\{((1, a), a); ((1, a), b); ((1, b), a); ((1, b), b); ((2, a), a); ((2, a), b); ((2, b), a); ((2, b), b); ((3, a), a); ((3, a), b); ((3, b), a); ((3, b), b); ((4, a), a); ((4, a), b); ((4, b), a); ((4, b), b)\}$
 (e) $\{(1, a, a); (1, a, b); (1, b, a); (1, b, b); (2, a, a); (2, a, b); (2, b, a); (2, b, b); (3, a, a); (3, a, b); (3, b, a); (3, b, b); (4, a, a); (4, a, b); (4, b, a); (4, b, b)\}$
 (f) $\{(1, (a, a)); (1, (a, b)); (1, (b, a)); (1, (b, b)); (2, (a, a)); (2, (a, b)); (2, (b, a)); (2, (b, b)); (3, (a, a)); (3, (a, b)); (3, (b, a)); (3, (b, b)); (4, (a, a)); (4, (a, b)); (4, (b, a)); (4, (b, b))\}$
2. existuje 16 rôznych binárnych relácií a to: $\{\emptyset\}; \{(1, 1)\}; \{(1, 2)\}; \{(2, 1)\}; \{(2, 2)\}; \{(1, 1), (1, 2)\}; \{(1, 1), (2, 1)\}; \{(1, 1), (2, 2)\}; \{(1, 2), (2, 1)\}; \{(1, 2), (2, 2)\}; \{(2, 1), (2, 2)\}; \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}; \{(1, 1), (1, 2), (2, 2)\}; \{(1, 1), (2, 1), (2, 2)\}; \{(1, 2), (2, 1), (2, 2)\}; \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$
3. (a) $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 2), (3, 2), (4, 4)\}$
 (b) $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 4), (3, 4), (4, 2), (4, 1)\}$
 (c) $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (2, 4), (4, 2)\}$
 (d) $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (4, 4)\}$
 (e) $\mathcal{S} = \{(1, 1), (2, 1), (4, 2), (4, 3), (2, 4)\}$
 (f) $\mathcal{S} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 2), (4, 4)\}$
4. (a) $\mathcal{R} = \{(a, a); (a, b); (b, b); (b, c); (b, d); (c, d); (d, d)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (b) $\mathcal{R} = \{(1, 1); (1, 2); (2, 1); (2, 2); (3, 3)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$


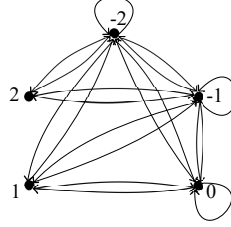
(c) $\mathcal{R} = \{(1, 1); (2, 3); (3, 4); (4, 1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



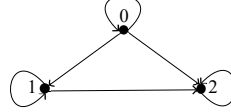
(d) $\mathcal{R} = \{(-2, -2); (-2, -1); (-2, 0); (-2, 1); (-2, 2); (-1, -2); (-1, -1); (-1, 0); (-1, 1); (-1, 2); (0, -2); (0, -1); (0, 0); (0, 1); (1, -2); (1, -1); (1, 0); (2, -2); (2, -1)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



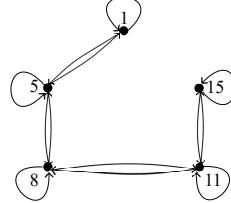
(e) $\mathcal{R} = \{(0, 0); (0, 1); (0, 2); (1, 1); (1, 2); (2, 2)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



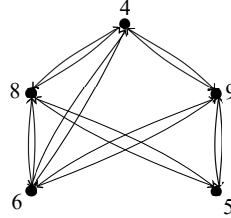
(f) $\mathcal{R} = \{(1, 1); (1, 5); (5, 1); (5, 8); (8, 5); (8, 11); (11, 8); (11, 15); (15, 11); (8, 8); (5, 5); (11, 11); (15, 15)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



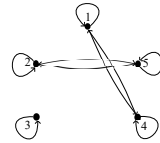
(g) $\mathcal{R} = \{(4, 6); (4, 8); (4, 9); (5, 8); (5, 9); (6, 4); (6, 8); (6, 9); (8, 6); (8, 5); (8, 4); (9, 4); (9, 5); (9, 6)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$



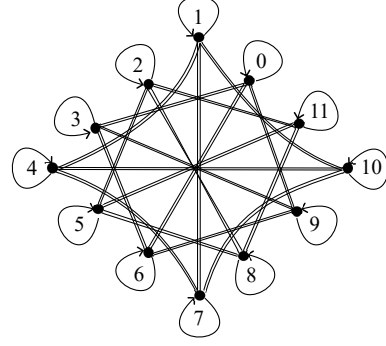
(h) $\mathcal{R} = \{(1, 4); (4, 1); (1, 1); (2, 2); (3, 3); (4, 4); (5, 5); (2, 5); (5, 2)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



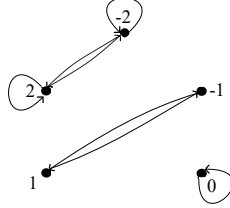
- (i) $\mathcal{R} = \{(0, 0); (0, 3); (0, 6); (0, 9); (1, 1); (1, 4); (1, 7); (1, 10); (2, 2); (2, 5); (2, 8); (2, 11); (3, 0); (3, 3); (3, 6); (3, 9); (4, 1); (4, 4); (4, 7); (4, 10); (5, 2); (5, 5); (5, 8); (5, 11); (6, 0); (6, 3); (6, 6); (6, 9); (7, 1); (7, 4); (7, 7); (7, 10); (8, 2); (8, 5); (8, 8); (8, 11); (9, 0); (9, 3); (9, 6); (9, 9); (10, 1); (10, 4); (10, 7); (10, 10); (11, 2); (11, 5); (11, 8); (11, 11)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



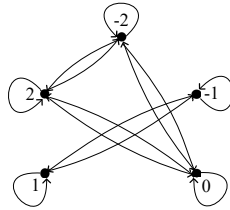
- (j) $\mathcal{R} = \{(-2, -2); (2, 2); (-2, 2); (2, -2); (-1, 1); (1, -1); (0, 0)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



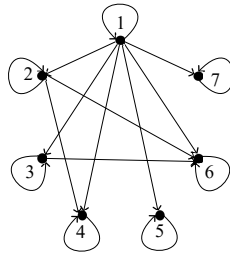
- (k) $\mathcal{R} = \{(-2, -2); (-2, 0); (-2, 2); (-1, -1); (-1, 1); (0, -2); (0, 0); (0, 2); (1, -1); (1, 1); (2, -2); (2, 0); (2, 2)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



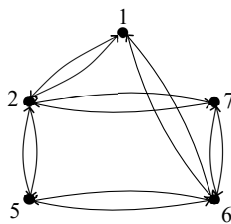
- (l) $\mathcal{R} = \{(1, 1); (1, 2); (1, 3); (1, 4); (1, 5); (1, 6); (1, 7); (2, 2); (2, 4); (2, 6); (3, 3); (3, 6); (4, 4); (5, 5); (6, 6); (7, 7)\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



- (m) $\mathcal{R} = \{(1, 2); (1, 6); (2, 1); (2, 5); (2, 7); (5, 2); (5, 6); (6, 1); (6, 5); (6, 7); (7, 2); (7, 6)\}$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



5. (a) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM
- (b) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM
- (c) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM
- (d) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM
- (e) je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna
je ČUM
- (f) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM
- (g) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM
- (h) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM
- (i) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM
- (j) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM
- (k) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM
- (l) je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna
je ČUM
- (m) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM
6. (a) nie
- (b) áno, rozklad: $\{\{1, 2\}; \{3\}\}$

- (c) nie
 - (d) nie
 - (e) nie
 - (f) nie
 - (g) nie
 - (h) áno, rozklad: $\{\{1,4\};\{2,5\};\{3\}\}$
 - (i) áno, rozklad: $\{\{0,3,6,9\};\{1,4,7,10\};\{2,5,8,11\}\}$
 - (j) nie
 - (k) áno, rozklad: $\{\{-2,0,2\};\{-1,1\}\}$
 - (l) nie
 - (m) nie
7. (a) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM, nie je ekvivalencia
- (b) nie je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM, nie je ekvivalencia
- (c) nie je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM, nie je ekvivalencia
- (d) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM, nie je ekvivalencia
- (e) je reflexívna, nie je symetrická, je antisymetrická, je tranzitívna
je ČUM, nie je ekvivalencia
- (f) je reflexívna, nie je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM, nie je ekvivalencia
- (g) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM, je ekvivalencia
- (h) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM, nie je ekvivalencia
- (i) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM, je ekvivalencia
- (j) je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, je tranzitívna
nie je ČUM, je ekvivalencia
- (k) nie je reflexívna, je symetrická, nie je antisymetrická, nie je tranzitívna
nie je ČUM, nie je ekvivalencia

Kapitola 3

Zobrazenia

1. Rozhodnite, či daná binárna relácia f je zobrazením. Ak sa jedná o zobrazenie, rozhodnite či je to injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenie.
 - (a) $\mathcal{R} = \{(a, a); (a, b); (b, b); (b, c); (b, d); (c, d); (d, d)\}$, $M = \{a, b, c, d\}$,
 - (b) $\mathcal{R} = \{(0, 1); (1, 2); (2, 1); (3, 3)\}$, $M = \{0, 1, 2, 3\}$,
 - (c) $\mathcal{R} = \{(1, 1); (2, 3); (3, 4); (4, 1)\}$, $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 - (d) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : x + y \leq 1\}$, $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$,
 - (e) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$, $M = \{0, 1, 2\}$,
 - (f) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : y = x^2\}$, $M = \{0, 1, 2, 3, 4\}$,
 - (g) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : {}^3/(y-x)\}$, $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$,
 - (h) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : x = y\}$, $M = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$,
 - (i) $\mathcal{R} = \{(x, y) \in M \times M : {}^4/(x+y)\}$, $M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$.
2. Rozhodnite, či je f injektívne, surjektívne a bijektívne zobrazenie, ak
 - (a) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 2x + 6\}$,
 - (b) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = x^2\}$,
 - (c) $f = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \langle 0, \infty \rangle : y = 2x + 6\}$,
 - (d) $f = \{(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times \mathbb{R} : y = \frac{1}{x}\}$,
 - (e) $f = \{(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \{0\}) : y = \frac{1}{x}\}$.
3. Existuje inverzné zobrazenie k zobrazeniam v predchádzajúcom príklade? Ak áno, napíšte ho.
4. Nech $f_1 = \sin(x^3 - 2)$, $f_2 = e^{x+1}$, $f_3 = \sqrt{x^2 + 5}$, $f_4 = \log(\frac{6}{x})$. Napíšte, čomu sa rovná zobrazenie g , ak

- (a) $g = f_1 \circ f_2$,
- (b) $g = f_2 \circ f_1$,
- (c) $g = f_3 \circ f_4$,
- (d) $g = f_4 \circ f_3$,
- (e) $g = f_1 \circ f_4 \circ f_3$,
- (f) $g = f_1 \circ f_3 \circ f_1$,
- (g) $g = f_4 \circ f_3 \circ f_1$,
- (h) $g = f_3 \circ f_2 \circ f_1$,
- (i) $g = f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4$,
- (j) $g = f_3 \circ f_1 \circ f_2 \circ f_4$.

Výsledky:

1. (a) nie je to zobrazenie
 (b) je to zobrazenie, nie je injektívne, nie je surjektívne, nie je bijektívne
 (c) nie je to zobrazenie
 (d) nie je to zobrazenie
 (e) je to zobrazenie, je injektívne, je surjektívne, je bijektívne
 (f) nie je to zobrazenie
 (g) nie je to zobrazenie
 (h) je to zobrazenie, je injektívne, je surjektívne, je bijektívne
 (i) nie je to zobrazenie
2. (a) je injektívne, je surjektívne, je bijektívne
 (b) nie je injektívne, nie je surjektívne, nie je bijektívne
 (c) nie je to zobrazenie
 (d) je injektívne, nie je surjektívne, nie je bijektívne
 (e) je injektívne, je surjektívne, je bijektívne
3. (a) existuje, $f^{-1} = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = \frac{1}{2}x - 3\}$
 (b) neexistuje
 (c) neexistuje
 (d) neexistuje
 (e) existuje, $f^{-1} = \{(x, y) \in (\mathbb{R} - \{0\}) \times (\mathbb{R} - \{0\}) : y = \frac{1}{x}\}$

4. (a) $\sin(e^{3x+3} - 2)$
 (b) $e^{\sin(x^3-2)+1}$
 (c) $\sqrt{2\log(\frac{6}{x}) + 5}$
 (d) $\log \frac{6}{\sqrt{x^2+5}}$
 (e) $\sin(3\log \frac{6}{\sqrt{x^2+5}} - 2)$
 (f) $\sin(\sqrt{(\sin^2(x^3 - 2) + 5)} - 2)$
 (g) $\log \frac{6}{\sqrt{\sin^2(x^3-2)+5}}$
 (h) $\sqrt{(e^{2\sin(x^3-2)+2}) + 5}$
 (i) $\sin(e^3\sqrt{2\log \frac{6}{x}+5+3} - 2)$
 (j) $\sqrt{\sin(e^{3\log(\frac{6}{x})+3} + 3)}$

Kapitola 4

Výroková logika

1. Rozhodnite, ktoré z nasledujúcich viet sú výroky. Ak sa jedná o výrok, rozhodnite, či je pravdivý, alebo nepravdivý.
 - (a) Číslo 3 je prvočíslo.
 - (b) Číslo 20 je nepárne.
 - (c) Počítaj!
 - (d) $\frac{0}{0} = 0$.
 - (e) Modré auto.
 - (f) $x > 2$.
 - (g) V štvoruholníku sa uhlopriečky rozpolujú.
 - (h) $2x + 5 = 0$.
 - (i) Vonku prší.
 - (j) Množina všetkých bodov rovnako vzdialených od dvoch pevných bodov je os úsečky AB .
2. Utvorte negácie nasledujúcich výrokov:
 - (a) Číslo 3 je prvočíslo.
 - (b) $3 < 5$.
 - (c) Všetky banány sú žlté.
 - (d) V našej knižnici je kniha, ktorá má na každej strane tlačovú chybu.
 - (e) Daná rovnica má aspoň dva reálne korene.
 - (f) Najviac štyria žiaci získali vyznamenania.
 - (g) Nikdy nikto nič nevie.
 - (h) $(\exists a \in \mathbb{R}) (a^2 + 1 < 0)$,

- (i) $(\forall x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \vee (x \in B))$,
- (j) $(\exists x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \Rightarrow (x \in B))$,
- (k) $(\forall x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \wedge (x \in B))$,
- (l) $(\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\exists x_0 \in \mathbb{R}) (\forall x \geq x_0) (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$.

3. Napíšte v symbolickej forme (pomocou znakov logických spojok):

- (a) Ani A , ani B .
- (b) Nie je pravda, že A a súčasne aj B .
- (c) Alebo nie A , alebo nie B .
- (d) Nie je pravda, že A alebo B .
- (e) Ak A , tak nie B .
- (f) Nie je pravda, že ak A , tak B .
- (g) Ak A , tak B , alebo ak nie A , tak nie B .
- (h) Ak A , tak nie B , ale ak nie A , tak B .

4. Vyjadrite symbolmi logiky. Pre vetu - Príde matka. - použite symbol M a pre vetu - Príde otec. - použite symbol O .

- (a) Ak príde otec, tak nepríde matka.
- (b) Príde aspoň jeden z rodičov.
- (c) Príde najviac jeden z rodičov.
- (d) Príde práve jeden z rodičov.

5. Dané sú výroky: Kreslím (K). Píšem (P). Tancujem (T). Spievam (S). Symbolicky zapíšte nasledujúce zložené výroky:

- (a) Keď spievam, nekreslím.
- (b) Nepíšem, alebo netancujem, práve vtedy, keď kreslím.
- (c) Netancujem, píšem.
- (d) Ak nespievam a nekreslím, píšem.

6. Nech A, B sú výroky. A : Číslo končí nulou. B : Číslo je párne. Utvorte výroky:

- (a) $A \Rightarrow B$.
- (b) $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$.
- (c) $B \Rightarrow A$.

(d) $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$.

7. Ktoré z nasledujúcich častí výrokov sú nutné a ktoré postačujúce podmienky?

- (a) Súčin dvoch čísel sa rovná nule, ak aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule.
- (b) Ak celé číslo končí číslicou 5, tak celé číslo je deliteľné číslom 5.

8. Z nasledujúcich výrokov vytvorte obmenenú vetu, obrátenú vetu a negáciu vety.

- (a) Ak je prirodzené číslo deliteľné deviatimi, tak je deliteľné aj tromi.
- (b) Ak má štvoruholník všetky štyri strany rovnako dlhé, tak je to štvorec alebo kosoštvorec.
- (c) Ak sa aspoň jedno z čísel a, b rovná nule, tak $ab = 0$.
- (d) Pre každé dva rovinné útvary U_1, U_2 platí, že ak sú zhodné, majú rovnaký obsah.

9. Rozhodnite, či je výrok α tautológia, kontradícia, alebo splniteľný, ak

- (a) $((x \vee y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow ((\overline{x \wedge \overline{y}}) \wedge \overline{z})$,
- (b) $(x \Leftrightarrow y) \wedge (x \Leftrightarrow z) \wedge (y \Leftrightarrow z)$,
- (c) $(x \Rightarrow (y \Rightarrow z)) \Leftrightarrow ((x \Rightarrow y) \Rightarrow (x \Rightarrow z))$.
- (d) $z \wedge (\overline{y} \vee (\overline{z} \Rightarrow x))$
- (e) $(x \Rightarrow y) \wedge (x \Leftrightarrow \overline{z})$

10. Zistite, či formuly α, β sú sémanticky ekvivalentné, ak

- (a) $\alpha = ((\overline{x} \Rightarrow y) \Rightarrow z) \Leftrightarrow (x \wedge z), \beta = (\overline{x} \vee \overline{z}) \Rightarrow (\overline{x} \wedge \overline{y})$,
- (b) $\alpha = (x \Rightarrow y) \vee (z \Leftrightarrow \overline{x}), \beta = z \Rightarrow (\overline{x} \vee y)$.
- (c) $\alpha = (\overline{x} \Rightarrow y) \wedge \overline{z}, \beta = (x \vee y) \wedge \overline{z}$.

11. Určte, či množina formúl M je splniteľná, ak

- (a) $M = \{x \vee \overline{y}, y \Leftrightarrow \overline{x}, y \Rightarrow x\}$,
- (b) $M = \{(x \wedge y) \Rightarrow z, (x \wedge \overline{y}) \Rightarrow z, x \Rightarrow z\}$,
- (c) $M = \{x \wedge y, \overline{x} \vee \overline{y}\}$,
- (d) $M = \{x \wedge y, x \Rightarrow z, x \Leftrightarrow \overline{y}\}$.

12. Rozhodnite, či platí $M \models \alpha$:

- (a) $M = \{p \Rightarrow q, p \vee q\}, \quad \alpha : p \wedge q,$
- (b) $M = \{p \vee q, p \wedge q\}, \quad \alpha : p \Rightarrow q,$
- (c) $M = \{x \Rightarrow y, \bar{y} \vee z, \bar{x} \wedge \bar{y}\}, \quad \alpha : y \Leftrightarrow z,$
- (d) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z, x \Leftrightarrow \bar{z}, (x \wedge y) \Rightarrow z\}, \alpha = (x \vee y) \Rightarrow z,$
- (e) $M = \{p \vee \bar{q}, \bar{q} \Leftrightarrow \bar{r}, \bar{p} \Rightarrow r\}, \quad \alpha : p \Rightarrow (q \wedge r),$
- (f) $M = \{(p \wedge q) \Rightarrow r, \bar{q} \wedge \bar{r}, r \Rightarrow \bar{p}\}, \quad \alpha : q \Rightarrow p,$
- (g) $M = \{(\bar{x} \vee y) \wedge z, (x \vee y) \Rightarrow z, x \Leftrightarrow \bar{z}\}, \quad \alpha : y \Rightarrow x,$
- (h) $M = \{z \Rightarrow \bar{x}, (x \wedge y) \Rightarrow z, \bar{y} \wedge \bar{z}\}, \quad \alpha : y \Rightarrow x,$
- (i) $M = \{(x \Rightarrow y) \vee z, x \Leftrightarrow \bar{z}, (x \wedge y) \Rightarrow z, \bar{y} \wedge z\}, \quad \alpha : (x \wedge y) \Rightarrow z,$
- (j) $M = \{x \Rightarrow (y \wedge z), x \Leftrightarrow y, \bar{x} \vee (y \Rightarrow z)\}, \quad \alpha : \bar{y} \wedge \bar{x}.$

13. Rozhodnite, či platí $M \models N$, ak:

- (a) $M = \{p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge \bar{q})\}$ a $N = \{p \Rightarrow r, q \Leftrightarrow r\},$
- (b) $M = \{p \Rightarrow r, q \Leftrightarrow r\}$ a $N = \{p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge \bar{q})\}$
- (c) $M = \{p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge \bar{p})\}, N = \{p \Rightarrow r, (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)\},$
- (d) $M = \{p \Rightarrow r, (q \Rightarrow r) \wedge (r \Rightarrow q)\}, N = \{p \vee q, q \Rightarrow (r \wedge \bar{p})\},$
- (e) $M = \{(\bar{x} \vee y) \wedge z, (x \vee y) \Rightarrow z\}, N = \{x \Leftrightarrow \bar{z}, y \Rightarrow x\}.$

14. Preformulujte nasledujúce vety do formúl výrokovej logiky a rozhodnite, či formula pod čiarou je dôsledkom formúl nad čiarou:

- (a) Vonku mrzne a nesneží.
Ak sneží, tak svieti slnko.

Vonku mrzne alebo nesvieti slnko.
- (b) Peter má vodičský preukaz, ale nemá auto.
Peter ide do práce, ak má auto.

Peter má vodičský preukaz alebo nepôjde do práce.
- (c) Nebudem sa učiť.
Budem smetiarom.
Ak budem smetiarom, budem hlúpy.

Ak sa nebudem učiť, budem hlúpy.

Výsledky:

- 1. (a) pravdivý výrok
- (b) nepravdivý výrok

- (c) nie je to výrok
 - (d) nie je to výrok
 - (e) nie je to výrok
 - (f) nie je to výrok
 - (g) pravdivý výrok
 - (h) nie je to výrok
 - (i) je to výrok, ale v čase mení svoju pravdivostnú hodnotu
 - (j) nie je to výrok
2. (a) Číslo 3 nie je prvočíslo.
- (b) $3 \geq 5$.
- (c) Existuje banán, ktorý nie je žltý.
- (d) V našej knižnici každá kniha má stranu bez tlačovej chyby.
- (e) Daná rovnica má najviac jeden reálny koreň.
- (f) Aspoň piati žiaci získali vyznamenania.
- (g) Niekedy niekto niečo vie.
- (h) $(\forall a \in \mathbb{R}) (a^2 + 1 \geq 0)$
- (i) $(\exists x \in \mathbb{C}) ((x \notin A) \wedge (x \notin B))$
- (j) $(\forall x \in \mathbb{C}) ((x \in A) \wedge (x \notin B))$
- (k) $(\exists x \in \mathbb{C}) ((x \notin A) \vee (x \notin B))$
- (l) $(\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+) (\forall x_0 \in \mathbb{R}) (\exists x < x_0) (|f(x) - fb| \geq \varepsilon)$
3. (a) $\overline{A} \wedge \overline{B}$
- (b) $\overline{(A \wedge B)}$
- (c) $\overline{A} \vee \overline{B}$
- (d) $\overline{(A \vee B)}$
- (e) $A \Rightarrow \overline{B}$
- (f) $\overline{(A \Rightarrow B)}$
- (g) $(A \Rightarrow B) \vee (\overline{A} \Rightarrow \overline{B})$
- (h) $(A \Rightarrow \overline{B}) \wedge (\overline{A} \Rightarrow B)$
4. (a) $O \Rightarrow \overline{M}$
- (b) $O \vee M$
- (c) $\overline{O \wedge M}$

- (d) $\overline{(O \Leftrightarrow M)}$
5. (a) $S \Rightarrow \overline{K}$
 (b) $(\overline{P} \vee \overline{T}) \Leftrightarrow K$
 (c) $\overline{T} \wedge P$
 (d) $(\overline{S} \wedge \overline{K}) \Rightarrow P$
6. (a) Ak číslo končí nulou, tak je párne.
 (b) Ak číslo nekončí nulou, tak nie je párne.
 (c) Ak je číslo párne, tak končí nulou.
 (d) Ak nie je číslo párne, tak nekončí nulou.
7. (a) Súčin dvoch čísel sa rovná nule. - nutná podmienka
 Aspoň jeden z činiteľov sa rovná nule. - postačujúca podmienka
 (b) Celé číslo končí číslicou 5. - postačujúca podmienka
 Celé číslo je deliteľné číslom 5. - nutná podmienka
8. (a) Obrátená: Ak je prirodzené číslo deliteľné tromi, tak je deliteľné aj deviatimi.
 Obmenená: Ak prirodzené číslo nie je deliteľné tromi, tak nie je deliteľné ani deviatimi.
 Negácia: Existuje prirodzené číslo, ktoré je deliteľné deviatimi a nie je deliteľné tromi.
 (b) Obrátená: Ak je štvoruholník štvorec alebo kosoštvorec, tak má všetky štyri strany rovnako dlhé.
 Obmenená: Ak štvoruholník nie je štvorec ani kosoštvorec, tak nemá všetky štyri strany rovnako dlhé.
 Negácia: Existuje štvoruholník, ktorý má všetky štyri strany rovnako dlhé a nie je to štvorec ani kosoštvorec.
 (c) Obrátená: Ak $ab = 0$, tak sa aspoň jedno z čísel a, b rovná nule.
 Obmenená: Ak $ab \neq 0$, tak ani jedno z čísel a, b sa nerovná nule.
 Negácia: Existujú čísla a, b také, že aspoň jedno je rovné nule a $ab \neq 0$.
 (d) Obrátená: Pre každé dva rovinné útvary U_1, U_2 platí, že ak majú rovnaký obsah, tak sú zhodné.
 Obmenená: Pre každé dva rovinné útvary U_1, U_2 platí, že ak nemajú rovnaký obsah, tak nie sú zhodné.
 Negácia: Existujú rovinné útvary U_1, U_2 pre ktoré platí, že sú zhodné a nemajú rovnaký obsah.
9. (a) nie je tautológia, nie je kontradikcia, je splniteľný

- (b) nie je tautológia, nie je kontradikcia, je splniteľný
 - (c) je tautológia, nie je kontradikcia, je splniteľný
 - (d) nie je tautológia, nie je kontradikcia, je splniteľný
 - (e) nie je tautológia, nie je kontradikcia, je splniteľný
10. (a) nie sú ekvivalentné
- (b) sú ekvivalentné
 - (c) sú ekvivalentné
11. (a) je splniteľná
- (b) je splniteľná
 - (c) nie je splniteľná
 - (d) nie je splniteľná
12. (a) neplatí
- (b) platí
 - (c) neplatí
 - (d) platí
 - (e) neplatí
 - (f) platí
 - (g) neplatí
 - (h) platí
 - (i) platí
 - (j) neplatí
13. (a) neplatí
- (b) neplatí
 - (c) neplatí
 - (d) neplatí
 - (e) neplatí
14. (a) platí
- (b) platí
 - (c) platí

Kapitola 5

Boolovske funkcie

1. Nájdite normálny disjunktívny tvar a normálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie realizovanej formulou:

(a) $((\bar{x} \Rightarrow y) \wedge x \wedge y) \wedge (x \vee \bar{y}),$

(b) $z \wedge (\bar{y} \vee (\bar{z} \Rightarrow x)),$

(c) $(p \Rightarrow q) \wedge ((\bar{q} \Rightarrow r) \vee \overline{(s \wedge \bar{t})}),$

(d) $(p \vee q \vee \bar{r}) \Leftrightarrow \bar{s}.$

2. Nájdite minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar pre funkcie v predchádzajúcom príklade.

3. Nájdite normálny disjunktívny tvar a minimálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie, ktorej normálny konjunktívny tvar je:

(a) $(x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}),$

(b) $(x \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}),$

(c) $(\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}).$

4. Nájdite normálny konjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie, ktorej normálny disjunktívny tvar je:

(a) $(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge y \wedge z),$

(b) $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}),$

(c) $(x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}).$

5. Nech booleovská funkcia $f(x, y, z)$ je daná tabuľkou. Nájdite jej normálny konjunktívny tvar a minimálny disjunktívny tvar.

x	y	z	f
1	1	1	0
1	1	0	1
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	1

6. Nájdite minimálny disjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch 1010, 0001, 0011, 1100, 1011, 0000, 1110.
7. Nájdite minimálny konjunktívny tvar booleovskej funkcie $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 1 iba v argumentoch 0101, 1110, 1100, 0011, 0111, 1111.
8. Nájdite minimálny konjunktívny tvar boolovskej funkcie $f(x, y, z, t)$, ktorá má normálny disjunktívny tvar:

- (a) $(x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge \bar{t}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t),$
- (b) $(\bar{x} \wedge y \wedge z \wedge \bar{t}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}),$
- (c) $(x \wedge y \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z \wedge \bar{t}),$
- (d) $(x \wedge y \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (x \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge \bar{t}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z} \wedge t) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge t) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z \wedge \bar{t}).$

9. Nájdite minimálny disjunktívny tvar boolovskej funkcie $f(x, y, z, t)$, ktorá má normálny konjunktívny tvar:

- (a) $(x \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \wedge (x \vee y \vee z \vee \bar{t}),$
- (b) $(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee \bar{t}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge (x \vee y \vee \bar{z} \vee \bar{t}),$
- (c) $(\bar{x} \vee y \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z} \vee t) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z \vee \bar{t}).$

Výsledky:

1. (a) $(x \wedge y), (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y}) \wedge (x \vee y)$

- (b) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z), (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$
- (c) $(p \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge q \wedge \bar{r} \wedge s) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge r \wedge s) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r} \wedge s) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge r \wedge s) \vee (\bar{p} \wedge q \wedge \bar{r} \wedge s) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge r \wedge s) \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \wedge \bar{r} \wedge s), (\bar{p} \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee s) \wedge (\bar{p} \vee \bar{q} \vee r \vee s) \wedge (\bar{p} \vee q \vee \bar{r} \vee s) \wedge (\bar{p} \vee q \vee r \vee s) \wedge (p \vee \bar{q} \vee \bar{r} \vee s) \wedge (p \vee \bar{q} \vee r \vee s) \wedge (p \vee q \vee \bar{r} \vee s) \wedge (p \vee q \vee r \vee s)$
2. (a) $x \wedge y$
- (b) z
- (c) $(\bar{p} \vee s) \wedge (\bar{q} \vee s) \wedge (r \vee s), s \vee (\bar{p} \wedge \bar{q} \vee r)$
3. (a) $(x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z})$
 $(x \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{z})$
- (b) $(x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z)$
 $(x \wedge \bar{y}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{y} \wedge z)$
- (c) $(x \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z})$
 $(x \wedge y) \vee (\bar{y} \wedge z) \vee (\bar{x} \wedge \bar{z})$
4. (a) $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$
 $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$
- (b) $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee z) \wedge (x \vee y \vee \bar{z})$
 $\bar{z} \wedge (\bar{x} \vee y) \wedge (x \vee \bar{y})$
- (c) $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y \vee z)$
 $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \wedge (y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee y)$
5. $(\bar{x} \vee \bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (x \vee \bar{y} \vee \bar{z}),$
 $(\bar{x} \wedge \bar{y}) \vee \bar{z}$
6. $(\bar{p} \wedge r \wedge \bar{s}) \vee (p \wedge \bar{q} \wedge \bar{r}) \vee (\bar{p} \wedge q) \vee (q \wedge s)$
7. $(\bar{p} \vee r \vee \bar{s}) \wedge (\bar{p} \vee q) \wedge (p \vee s) \wedge (q \vee r)$
8. (a) $(\bar{y} \vee \bar{z}) \wedge (x \vee t) \wedge (\bar{y} \vee \bar{t})$
- (b) $(y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{z} \vee \bar{t}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y})$
- (c) $y \wedge (z \vee t) \wedge (\bar{x} \vee t)$
- (d) $(x \vee \bar{z} \vee t) \wedge (y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y)$
9. (a) $(\bar{x} \wedge z) \vee (\bar{y} \wedge \bar{t}) \vee (x \wedge \bar{z} \wedge t)$
- (b) $\bar{z} \vee (x \wedge y \wedge t)$
- (c) $x \vee (z \wedge t) \vee (\bar{z} \wedge \bar{t})$

Literatúra

- [1] M. Bučko, M. Klešč: *Diskrétna matematika*, Academic Press *elfa*, s.r.o., Košice 1999.
- [2] J. Johnsonbaugh: *Discrete Mathematics*, Macmillan Publishing Company, New York 1990.
- [3] P. Galajda, Š. Schrötter: *Funkcie komplexnej premennej a operátorový počet*, Alfa, Bratislava 1991.
- [4] W. Kelley, A. Peterson: *Difference Equations An Introduction with Applications*, Academic Press, London 2001.
- [5] K. H. Rosen: *Discrete Mathematics and Its Applications*, AT&T Information Systems, New York 1988.
- [6] E. R. Scheinerman: *Mathematics a Discrete Introduction* Books/Cole Publ. Company. 2000.