

Repetitóriium z matematiky

2.prednáška

Konzultácie: piatok: 10:00 – 11:00, Boženy Nemcovej 32, 6. poschodie, č. k. 614

Pr. 1 – str. 13/3: Doplňte daný výraz na štvorec:

b) $x^2 + 4x - 7$;

$$p = 4$$

$$q = 7$$

$$\left(x + \frac{4}{2}\right)^2 - 7 - \left(\frac{4}{2}\right)^2$$

$$= (x + 2)^2 - 7 - 4$$

$$= (x + 2)^2 - 11$$

d) $x^2 + 10x + 22$;

$$p = 10$$

$$q = 22$$

$$\left(x + \frac{10}{2}\right)^2 + 22 - \left(\frac{10}{2}\right)^2$$

$$(x + 5)^2 + 22 - 25$$

$$(x + 5)^2 - 3$$

Úprava: doplnenie na štvorec

$$x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 \pm q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

vždy znamienko mínus

$$\text{e) } 6y - y^2 = -y^2 + 6y = -(y^2 - 6y)$$

$$p = 6$$

$$q = 0$$

$$- \left[\left(y - \frac{6}{2} \right)^2 - 0 - \left(\frac{6}{2} \right)^2 \right] =$$

$$- \left[\left(y - 3 \right)^2 - 9 \right] =$$

$$- \left(y - 3 \right)^2 + 9$$

$$\text{i) } 2x^2 - 12x - 2 = 2 \left(\underbrace{x^2 - 6x - 1} \right)$$

$$p = 6$$

$$q = -1$$

$$= 2 \left[\left(x - \frac{6}{2} \right)^2 - 1 - \left(\frac{6}{2} \right)^2 \right]$$

$$= 2 \left[\left(x - 3 \right)^2 - 1 - 9 \right]$$

$$= 2 \left[\left(x - 3 \right)^2 - 10 \right]$$

$$= 2 \left(x - 3 \right)^2 - 20$$

Úprava: doplnenie na štvorec

$$x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2} \right)^2 \pm q - \left(\frac{p}{2} \right)^2$$

vždy znamienko mínus

a) $x^2 - 2x + 2;$

$$[(x - 1)^2 + 1]$$

$$= \left(x - \frac{2}{2}\right)^2 + 2 - \left(\frac{2}{2}\right)^2 = (x - 1)^2 + 2 - 1 = (x - 1)^2 + 1$$

$$p = 2$$

$$q = 2$$

Úprava: doplnenie na štvorec

$$x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 \pm q - \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

vždy znamienko mínus

Lineárne a kvadratické rovnice

Všeobecný zápis rovníc $P(x) = L(x)$

- zápis výsledku $K = \{x\}$, množina všetkých koreňov rovnice (v danom **obore premennej** O – číselný obor, v ktorom hľadáme premennú)
- určiť podmienky riešenia – **definičný obor** D
- potrebná skúška správnosti, ak nepoužijeme ekvivalentné úpravy

Najbežnejšie (dôsledkové) úpravy rovníc na množine $O \cap D$ sú:

1. Vzájomná výmena strán rovnice. $3x + 5 = 2x - 1 \rightarrow 2x - 1 = 3x + 5$

2. Nahradenie ľubovoľnej strany rovnice výrazom, ktorý sa jej rovná na $O \cap D$.

$$3x + 5 = 2x - 1 \rightarrow 2x + x + 6 - 1 = 2x - 1$$

3. Pripočítanie výrazu z $O \cap D$ k obidvom stranám rovnice.

$$3x + 5 - 5 = 2x - 1 - 5$$

4. Vynásobenie obidvoch strán rovnice výrazom, a) ktorý je z $O \cap D$ b) nadobúda nenulové hodnoty na $O \cap D$.

$$\frac{2x-8}{3} = 4x - 2 \rightarrow \frac{2x-8}{3} \cdot 3 = (4x - 2) \cdot 3$$

5. Umocnenie obidvoch strán rovnice a) na druhú, tretiu, štvrtú, atď.
b) na druhú, štvrtú, atď., ak obe strany rovnice nadobúdajú na množine $O \cap D$ nezáporné hodnoty.

6. Odmocnenie obidvoch strán rovnice, ak obe strany nadobúdajú na množine $O \cap D$ nezáporné hodnoty.

Vyššie uvedené úpravy (okrem úprav 4a, 5a) patria medzi tzv. **ekvivalentné úpravy rovnice**.

Lineárne rovnice: $ax + b = 0$, x – premenná, a, b – koeficienty (čísla $\in \mathbb{R}$), $a \neq 0$

Kvadratické rovnice: $ax^2 + bx + c = 0$, x – premenná, a, b, c – koeficienty (čísla $\in \mathbb{R}$),
 $a \neq 0$

Riešenie pomocou diskriminantu

$$D = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

ak $D > 0$ rovnica má 2 rôzne korene $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

ak $D = 0$ rovnica má 1 koreň (dvojnásobný) $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$

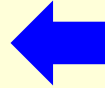
ak $D < 0$ rovnica nemá riešenie v $\mathbb{R}$

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \leftarrow$$

Úprava na súčin koreňových činiteľov

Riešenie pomocou Vietovych vzťahov

$$x^2 + bx + c = (x - x_1)(x - x_2)$$



Úprava súčin koreňových činiteľov

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$a = 1$$

Riešenie pomocou vzorcov

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Pr. 2 – kap. 2 , str. 5 / 1 - 3:

Upravte kvadratický výraz na súčin koreňových činiteľov:

1. $x^2 - 2x + 1$; $ax^2 + bx + c$ $a = 1$

$$b = -2$$

$$c = 1$$

1) $D = b^2 - 4ac$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1$$

$$D = 4 - 4 = 0 \rightarrow \text{dvojnásobný koreň}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a} = \frac{+2}{2 \cdot 1} = +1$$

$$a(x - x_1)(x - x_2) = 1(x - 1)(x - 1) = (x - 1)(x - 1) = (x - 1)^2$$

2)

$$x_1 \cdot x_2 = c$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 + x_2 = -(-2)$$

$$x_1 + x_2 = 2$$

$$1 + 1 = 2 \checkmark$$

$$x_1 \cdot x_2 = 1 \begin{cases} 1 \cdot 1 \\ (-1) \cdot (-1) \end{cases}$$

$$x_1 = 1$$

$$x_2 = 1$$

$$-1 + (-1) = -2 \quad x$$

$$(x - x_1)(x - x_2) = (x - 1)(x - 1)$$

Upravte kvadratický výraz na sčín kořenových činitelov:

1. $x^2 - 2x + 1$;

3) $a^2 - \underline{2ab} + b^2 = (a-b)^2$

$x^2 - \underline{2x} + 1 = (x-1)^2$

$a^2 = x^2 \rightarrow a = x$

$b^2 = 1 \rightarrow b = 1$

$-2ab \rightarrow -2 \cdot x \cdot 1 \checkmark$

$$3. x^2 - 5x + 6;$$

$$x_1 \cdot x_2 = c \rightarrow x_1 \cdot x_2 = 6 \begin{cases} 2 \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-3) \end{cases}$$

$$x_1 + x_2 = -b$$

$$x_1 + x_2 = -(-5)$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

$$2 + 3 = 5$$

$$-2 - 3 = -5 \quad X$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$$

$$x_1 = 2$$

$$x_2 = 3$$

~~$$a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{matrix} \swarrow & \searrow \\ x & \sqrt{6} \end{matrix}$$

$$\underline{\underline{5x}}$$~~

$$2. x^2 + 6x + 9;$$

$$x_1 \cdot x_2 = 9 \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} 9 = 3 \cdot 3 \\ 9 = (-3) \cdot (-3) \end{array}$$

$$x_1 + x_2 = -6$$



$$3 + 3 \neq -6$$

$$-3 + (-3) = -6$$



$$x_1 = -3, x_2 = -3$$

$$x^2 + 6x + 9 = (x + 3)(x + 3) = (x + 3)^2$$

Pr. 3 – kap. 2 , str. 5 / 2 :

Rozložte daný výraz na súčin:

1. $x^4 - 2x^2 + 1$;

2. $x^4 - 8x^2 + 16$;

3. $x^4 - 18x^2 + 81$;

5. $x^4 + 18x^2 + 81$;

$$a^2 - b^2 = (a - b) \cdot (a + b)$$



$$x^4 - 8x^2 + 16 = (x^2 - 4)^2 = \left[(x-2)(x+2) \right]^2 = (x-2)^2 (x+2)^2$$

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$\rightarrow a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^2 = x^4 \rightarrow a = x^2$$

$$a^2 = x^4 \rightarrow x = a$$

$$4 = b^2 \rightarrow 2 = b$$

$$b^2 = 16 \rightarrow b = 4$$

Pr. 4 – kap. 2 , str. 5 / 5 :

Rozložte daný výraz na súčin:

1. $x^4 - 2x^2 + 1$;

2. $x^4 - 8x^2 + 16$;

3. $x^4 - 18x^2 + 81$;

5. $x^4 + 18x^2 + 81$;

$$x^4 + 18x^2 + 81 = (x^2 + 9)^2$$

$$a^2 + 2ab + b^2$$

$$a^2 = x^4$$

$$b^2 = 81$$

$$2ab = 2 \cdot x^2 \cdot 9$$

Pr. 5 – kap. 2 , str. 5 / 1 :

$$1. \quad \frac{3-x}{2} - \left(\frac{7-x}{3} - \frac{x+3}{4} \right) + \frac{7-x}{6} - \frac{9+7x}{8} + x = 0; \quad D = \mathcal{R} \quad [1]$$

$$\frac{3-x}{2} - \frac{(7-x)}{3} + \frac{(x+3)}{4} + \frac{(7-x)}{6} - \frac{(9+7x)}{8} + x = 0 \quad / \cdot 24 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

$$\frac{\cancel{24}(3-x)}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{24}(7-x)}{\cancel{3}} + \frac{\cancel{24}(x+3)}{\cancel{4}} + \frac{\cancel{24}(7-x)}{\cancel{6}} - \frac{\cancel{24}(9+7x)}{\cancel{8}} + 24x = 0$$

$$12(3-x) - 8(7-x) + 6(x+3) + 4(7-x) - 3(9+7x) + 24x = 0$$

$$\underline{36} - \underline{12x} - \underline{56} + \underline{8x} + \underline{6x} + \underline{18} + \underline{28} - \underline{4x} - \underline{27} - \underline{21x} + \underline{24x} = 0$$

$$x - 1 = 0$$

$$\underline{\underline{x = 1}} \in D \rightarrow K = \{1\}$$

Skúška správnosti:

$$L^v: \frac{3-1}{2} - \left(\frac{7-1}{3} - \frac{1+3}{4} \right) + \frac{7-1}{6} - \frac{(9+7 \cdot 1)}{8} + 1 =$$

$$\frac{2}{2} - \left(\frac{6}{3} - \frac{4}{4} \right) + \frac{6}{6} - \frac{16}{8} + 1 =$$

$$1 - (2 - 1) + 1 - 2 + 1 =$$

$$1 - 1 + 1 - 2 + 1 = 0$$

$$P: 0$$

$$P = L^v \quad \checkmark$$

Pr. 6 – kap. 2 , str. 6 / 5 :

$$5. \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x};$$

$$[K = \mathbb{R} - \{1; -1\}]$$

Podmienky riešenia:

$$1-x^2 \neq 0 \wedge 1+x \neq 0 \wedge 1-x \neq 0$$

$$-x^2 \neq -1$$

$$x^2 \neq 1$$

$$|x| \neq 1$$

$$x \neq \pm 1$$

$$D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

$$a^2 - b^2 = (a-b) \cdot (a+b)$$

$$\frac{2}{(1-x)(1+x)} - \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-x}$$

$$/ \cdot (1-x)(1+x)$$

$$2 - \frac{1 \cdot (1-x) \cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}} = \frac{(1-x) \cancel{(1+x)}}{\cancel{1+x}}$$

$$2 - (1-x) = 1+x$$

$$2 - 1 + x = 1+x$$

$$1+x = 1+x$$

$$1-1 = x-x$$

$$0=0$$

$$x \in \mathbb{R}$$

$$K = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

Skúška správnosti: zvolíme $x=0 \in K$

$$L^{\vee}: \frac{2}{1-0} - \frac{1}{1-0} = \frac{2}{1} - \frac{1}{1} = 1$$

$$P: \frac{1}{1-0} = 1$$

$$P = L^{\vee} \checkmark$$

Pr. 7– kap. 2 , str. 6 / 7 :

7. $\frac{1}{3-x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{2(x-3)} + \frac{(x-1)^2}{x^2-2x-3};$

[2/3]

podmienky: $3-x \neq 0$ $|$ $x+1 \neq 0$ $|$ $x-3 \neq 0$ $|$ $x^2 - 2x - 3 \neq 0$
 $x \neq 3$ $x \neq -1$ $(x-3)(x+1) \neq 0$
 ← to isté ← $\leftarrow$ Vieta rovnice

$$D = R - \{-1, 3\}$$

$$\frac{1}{-1(-3+x)} - \frac{1}{x+1} = \frac{x}{2(x-3)} + \frac{(x-1)^2}{(x-3)(x+1)} \quad / \cdot 2(x+1)(x-3)$$

$$\frac{2(x-3)(x+1)}{-(x-3)} - \frac{2(x-3)(x+1)}{x+1} = \frac{2x(x+1)(x-3)}{2(x-3)} + \frac{(x-1)^2 \cdot 2(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-3)}$$

$$\begin{aligned} -2(x+1) - 2(x-3) &= x(x+1) + 2(x-1)^2 \\ -2x-2-2x+6 &= x^2+2x+2(x^2-2x+1) \end{aligned} \quad \leftarrow (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$-4x + 4 = x^2 + 2x + 2x^2 - 4x + 2$$

$$0 = 3x^2 + x - 2$$

$$D = 3x^2 + x - 2$$

$$D = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 1 + 24 = 25 > 0 \quad \sqrt{25} = 5$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{2 \cdot 3} = \begin{cases} \frac{4}{6} = \frac{2 \cdot 2}{2 \cdot 3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}} \\ \underline{\underline{-\frac{6}{6} = -1}} \quad \times \end{cases}$$

$$K = \left\{ \frac{2}{3} \right\}$$

Pr. 8 – kap. 2 , str. 6 / 13 :

$$13. \frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1};$$

$$[K = \{2\}]$$

podmienky rieš.: $2x-1 \neq 0 \quad \wedge \quad 3x+1 \neq 0$ $D = R - \left\{ \frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right\}$
 $x \neq \frac{1}{2} \quad 3x \neq -1$
 $x \neq -\frac{1}{3}$

$$\frac{5-x}{2x-1} = \frac{15-4x}{3x+1} \quad / \cdot (2x-1)(3x+1)$$

$$(5-x)(3x+1) = (15-4x)(2x-1)$$

$$\underline{15x + 5} - \underline{3x^2 - x} = \underline{30x - 15} - \underline{8x^2 + 4x}$$

$$0 = -5x^2 + 20x - 20 \quad / : -5$$

$$0 = x^2 - 4x + 4 \quad \leftarrow a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$$

$$0 = (x-2)(x-2)$$

$$a = x \quad a^2 = x^2$$

$$0 = (x-2)^2$$

$$b = 2 \quad b^2 = 2^2 = 4$$

$$x = 2 \in D \rightarrow K = \{2\}$$

Dú: str. Kapitola 1: 12 – 16 / 3b,h, f, i, h

Kapitola 2: Úprava výrazov na súčin koreňových činiteľov str. 5 / 1, 4, 5

Rozložiť na súčin str. 5 / 1, 3, 5

Vyriešte v $\mathbb{R}$ rovnice str. 6 / 2, 3, 8, 9, 11, 12