SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

SÚSTAVU
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}\cdot x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}\cdot x_n &= b_m \end{aligned}$$

NAZÝVAME SÚSTAVA LINEÁRNYCH ALGEBRAICKÝCH ROVNÍC.

ČÍSLA $a_{11}; \dots a_{mn}$ NAZÝVAME KOEFICIENTY SÚSTAVY; $a_{ij} \in \mathbb{R}$, $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$

$x_1, x_2, \dots, x_n$ NAZÝVAME NEZNÁME; $x_j \in \mathbb{R}$

$b_1, b_2, \dots, b_m$ NAZÝVAME PRAVÉ STRANY ROVNÍC; $b_i \in \mathbb{R}$

UVEDENÚ SÚSTAVU LINEÁRNYCH ROVNÍC PREPÍŠEME DO MATICOVÉHO TVARU

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots a_{2n} & b_2 \\ \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

A $\qquad$ $\bar{A}$

A – MATICA SÚSTAVY

$\bar{A}$ – ROZŠÍRENÁ MATICA SÚSTAVY

n – POČET NEZNÁMYCH

FROBENIOVA VETA: SÚSTAVA
$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ &\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

MÁ RIEŠENIE PRÁVE VTEDY, AK $h(A) = h(\bar{A})$.

V TOM PRÍPADE

a) AK $h(A) = h(\bar{A}) = n$, TAK SÚSTAVA MÁ PRÁVE JEDNO RIEŠENIE

b) AK $h(A) = h(\bar{A}) < n$, TAK SÚSTAVA MÁ ∞ VEĽA RIEŠENÍ

V PRÍPADE, ŽE $h(A) \neq h(\bar{A})$, TAK SÚSTAVA NEMÁ RIEŠENIE

GAUSSOVA ELIMINAČNÁ METÓDA (GEM)

1) SÚSTAVU LINEÁRNYCH ROVNÍC PREPÍŠEME DO TVARU ROZŠÍRENEJ MATICE SÚSTAVY
2) POMOCOU EKVIVALENTNÝCH ÚPRAV JU UPRAVÍME NA STUPŇOVITÝ TVAR
3) NA ZÁKLADE FROBENIOVEJ VETY UROBÍME ZÁVER O POČTE RIEŠENÍ
4) URČÍME RIEŠENIE SÚSTAVY

PRÍKLAD: POMOCOU GEM RIEŠME SÚSTAVU ROVNÍC

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 + 11x_3 + 5x_4 &= 2 \\ 1x_1 + 1x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= -3 \\ 1x_1 + 1x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= -3 \end{aligned} \Rightarrow \text{PREPÍS POMOCOU ROZŠÍRENEJ MATICE SÚSTAVY}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 11 & 5 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 3 & 4 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -7 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ +R_2 \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -4 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ (-3)+R_3 \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -7 & 7 \end{array}\right) \Rightarrow \text{FROBENIOVA VETA}$$

A $\qquad$ $\bar{A}$

$h(A) = 4$, $h(\bar{A}) = 4$, $n = 4$ } SÚSTAVA MÁ RIEŠENIE } SÚSTAVA MÁ PRÁVE 1 RIEŠ.

$\Rightarrow$ URČENIE RIEŠENIA SÚSTAVY:

$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 - 7x_4 = 7$
$-7x_4 = 7$
$\underline{\underline{x_4 = -1}}$

$-6x_3 - x_4 = -5$
$-6x_3 + 1 = -5$
$-6x_3 = -6$
$\underline{\underline{x_3 = 1}}$

$x_2 + x_3 + x_4 = 0$
$x_2 + 1 - 1 = 0$
$\underline{\underline{x_2 = 0}}$

$x_1 + x_2 + 5x_3 + 2x_4 = 1$
$x_1 + 0 + 5 - 2 = 1$
$\underline{\underline{x_1 = -2}}$

RIEŠENIE SÚSTAVY JE VEKTOR $\bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = (-2, 0, 1, -1)^T$

PRÍKLAD: RIEŠME SÚSTAVU LIN. ROVNÍC

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 \quad - 3x_4 &= 2 \\ 3x_1 \quad - x_3 + x_4 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 &= -6 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= -1 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} -R_3 \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 5 & -6 \\ 3 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -3R_1 \\ -2R_1 \\ -3R_1 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 10 \\ 0 & -3 & 5 & -5 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 & -5 & 11 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \\ \\ (-3)+2R_2 \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 1 & -13 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -2R_3 \\ +7R_3 \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & -20 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ +5R_4 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & -3 & 4 & -7 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = 4$, $h(\bar{A}) = 4$, $n = 4$ } SÚST. MÁ RIEŠ } SÚSTAVA MÁ PRÁVE 1 RIEŠENIE

NEPODSTATNÝ RIADOK – NEDÁVA MI ŽIADNU INFORMÁCIU

$-3x_4 = 4$
$\underline{\underline{x_4 = -\frac{4}{3}}}$

$x_3 - \frac{8}{3} = -1$
$\underline{\underline{x_3 = \frac{5}{3}}}$

$-3x_2 + \frac{20}{3} + \frac{28}{3} = 10$
$-3x_2 = 10 - 16$
$\underline{\underline{x_2 = 2}}$

$x_1 + 2 - \frac{10}{3} - \frac{8}{3} = -4$
$x_1 = -6 + 6$
$\underline{\underline{x_1 = 0}}$

$$\underline{\underline{\bar{x} = \left(0, 2, \frac{5}{3}, -\frac{4}{3}\right)^T}}$$