

Fuzzy negácia

Fuzzy negácia je unárna operácia $\neg : \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ spĺňajúca dve nasledujúce axiómy:

$$\alpha \leq \beta \Rightarrow \neg \beta \leq \neg \alpha \quad (\text{nerastúcosť}) \quad (\text{N1})$$

$$\neg \neg \alpha = \alpha \quad (\text{involutívnosť}) \quad (\text{N2})$$

- z axióm (N1) a (N2) vyplývajú mnoho silnejšie vlastnosti

Veta (O vlastnostiach fuzzy negácií)

Každá fuzzy negácia $\neg$ je spojitá, klesajúca, bijektívna a spĺňa okrajové podmienky

$$\neg 1 = 0, \quad \neg 0 = 1. \quad (\text{N0})$$

Equilibrium

Pre každú fuzzy negáciu $\neg$ existuje práve jedna hodnota $e \in (0, 1)$, pre ktorú

$$\neg e = e.$$

Nazývame ju **rovnovážná hodnota** (angl. equilibrium).

Fuzzy doplnok

Fuzzy doplnok je operácia na fuzzy množinách definovaná pomocou fuzzy negácie

$$\mu_{\bar{A}}(x) = \neg \mu_A(x).$$

Množina $\bar{A}$ sa nazýva **fuzzy doplnok** k fuzzy množine A .

Fuzzy konjunkcia

Fuzzy konjunkcia (trojuholníková norma, angl. triangular norm) je binárna operácia $\wedge : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ spĺňajúca nasledujúce axiómy pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\alpha \wedge \beta = \beta \wedge \alpha \quad (\text{komutatívnosť}) \quad (\text{T1})$$

$$(\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma = \alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \quad (\text{asociatívnosť}) \quad (\text{T2})$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge \gamma \quad (\text{monotónnosť}) \quad (\text{T3})$$

$$\alpha \wedge 1 = \alpha \quad (\text{okrajová podmienka}) \quad (\text{T4})$$

- pre každú fuzzy konjunkciu $\wedge$ a $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ platí: $\alpha \wedge 0 = 0$

- Štandardná fuzzy konjunkcia (minimálna, Gödelova, Zadehova)

$$\alpha \wedge_S \beta = \min\{\alpha, \beta\}$$

- Lukasiewiczova fuzzy konjunkcia (Gilesova, angl. bold)

$$\alpha \wedge_L \beta = \begin{cases} \alpha + \beta - 1 & \text{pre } \alpha + \beta - 1 > 0 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

- Súčinová fuzzy konjunkcia (produktová, angl. algebraic product)

$$\alpha \wedge_P \beta = \alpha \cdot \beta$$

- Drastická fuzzy konjunkcia (slabá, angl. weak)

$$\alpha \wedge_D \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pre } \beta = 1 \\ \beta & \text{pre } \alpha = 1 \\ 0 & \text{inak} \end{cases}$$

Veta (O usporiadaní fuzzy konjunkcií)

Medzi všetkými fuzzy konjunkciami je Štandardná najväčšia a Drastická najmenšia, t. j. pre ľubovoľnú fuzzy konjunkciu $\wedge$ platí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \quad \alpha \wedge_D \beta \leq \alpha \wedge \beta \leq \alpha \wedge_S \beta.$$

Fuzzy prienik

Fuzzy prienik je operácia na fuzzy množinách definovaná pomocou fuzzy konjunkcie

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x).$$

Množina $A \cap B$ sa nazýva **fuzzy prienik** fuzzy množín A a B .

Hovoríme, že fuzzy konjunkcia $\wedge$ je

- **archimedovská** (angl. archimedean), ak

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \quad \alpha \wedge \alpha < \alpha \quad (\text{TA})$$

- **striktná** (angl. strict), ak

$$\forall \alpha \in (0, 1) \forall \beta, \gamma \in (0, 1) : \quad \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \wedge \beta < \alpha \wedge \gamma \quad (\text{T3+})$$

- **nilpotentná** (angl. nilpotent), ak je archimedovská a nie je striktná

Fuzzy disjunkcia

Fuzzy disjunkcia (trojuholníková konorma, angl. triangular conorm) je binárna operácia $\vee : \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ spĺňajúca nasledujúce axiómy pre všetky $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\alpha \vee \beta = \beta \vee \alpha \quad (\text{komutatívnosť}) \quad (\text{S1})$$

$$(\alpha \vee \beta) \vee \gamma = \alpha \vee (\beta \vee \gamma) \quad (\text{asociatívnosť}) \quad (\text{S2})$$

$$\beta \leq \gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta \leq \alpha \vee \gamma \quad (\text{monotónnosť}) \quad (\text{S3})$$

$$\alpha \vee 0 = \alpha \quad (\text{okrajová podmienka}) \quad (\text{S4})$$

- pre každú fuzzy disjunkciu $\vee$ a $\alpha \in \langle 0, 1 \rangle$ platí: $\alpha \vee 1 = 1$

- Štandardná fuzzy disjunkcia (maximálna, Gödelova, Zadehova)

$$\alpha \vee_S \beta = \max\{\alpha, \beta\}$$

- Lukasiewiczova fuzzy disjunkcia (Gilesova, angl. bold)

$$\alpha \vee_L \beta = \begin{cases} \alpha + \beta & \text{pre } \alpha + \beta < 1 \\ 1 & \text{inak} \end{cases}$$

- Súčinová fuzzy disjunkcia (produktová, angl. algebraic product)

$$\alpha \vee_P \beta = \alpha + \beta - \alpha \cdot \beta$$

- Drastická fuzzy disjunkcia (slabá, angl. weak)

$$\alpha \vee_D \beta = \begin{cases} \alpha & \text{pre } \beta = 0 \\ \beta & \text{pre } \alpha = 0 \\ 1 & \text{inak} \end{cases}$$

Veta (O usporiadaní fuzzy disjunkcií)

Medzi všetkými fuzzy disjunkciami je Štandardná najmenšia a Drastická najväčšia, t. j. pre ľubovoľnú fuzzy disjunkciu $\vee$ platí

$$\forall \alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle : \quad \alpha \underset{S}{\vee} \beta \leq \alpha \vee \beta \leq \alpha \underset{D}{\vee} \beta.$$

Fuzzy zjednotenie

Fuzzy zjednotenie je operácia na fuzzy množinách definovaná pomocou fuzzy disjunkcie

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x).$$

Množina $A \cup B$ sa nazýva **fuzzy zjednotenie** fuzzy množín A a B .

Hovoríme, že fuzzy disjunkcia $\vee$ je

- **archimedovská** (angl. archimedean), ak

$$\forall \alpha \in (0, 1) : \quad \alpha \vee \alpha > \alpha \quad (\text{SA})$$

- **striktná** (angl. strict), ak

$$\forall \alpha \in \langle 0, 1 \rangle \quad \forall \beta, \gamma \in \langle 0, 1 \rangle : \quad \beta < \gamma \Rightarrow \alpha \vee \beta < \alpha \vee \gamma \quad (\text{S3+})$$

- **nilpotentná** (angl. nilpotent), ak je archimedovská a nie je striktná

Fuzzy implikácia

Za **fuzzy implikáciu** budeme považovať akúkoľvek binárnu operáciu $\rightarrow$: $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$, ktorá sa na $\{0, 1\} \times \{0, 1\}$ zhoduje s klasickou implikáciou.

- tri najčastejšie používané typy fuzzy implikácií:

- **Reziduovaná fuzzy implikácia** (R-implikácia)

$$\alpha \xrightarrow{R} \beta = \sup\{\gamma : \alpha \wedge \gamma \leq \beta\} \quad (\text{RI})$$

- **S-fuzzy implikácia**

$$\alpha \xrightarrow{S} \beta = \neg_S \alpha \vee \beta \quad (\text{SI})$$

- **Kvantová fuzzy implikácia** (Q-implikácia)

$$\alpha \xrightarrow{Q} \beta = \neg_S \alpha \vee (\alpha \wedge \beta) \quad (\text{QI})$$

- tri R-implikácie odpovedajúce fuzzy konjunkciám:

- Štandardná fuzzy konjunkcia odvodzuje

$$\alpha \xrightarrow[S]{R} \beta = \sup\{\gamma : \alpha \wedge_S \gamma \leq \beta\} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \alpha \leq \beta \\ \beta & \text{inak} \end{cases}$$

- Lukasiewiczová fuzzy konjunkcia odvodzuje

$$\alpha \xrightarrow[L]{R} \beta = \sup\{\gamma : \alpha \wedge_L \gamma \leq \beta\} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \alpha \leq \beta \\ 1 - \alpha + \beta & \text{inak} \end{cases}$$

- Súčinová fuzzy konjunkcia odvodzuje

$$\alpha \xrightarrow[P]{R} \beta = \sup\{\gamma : \alpha \wedge_P \gamma \leq \beta\} = \begin{cases} 1 & \text{pre } \alpha \leq \beta \\ \frac{\beta}{\alpha} & \text{inak} \end{cases}$$

Veta (O reziduovanej fuzzy implikácii)

Každá reziduovaná fuzzy implikácia $\xrightarrow{R}$ spĺňa tri nasledujúce podmienky:

$$\alpha \xrightarrow{R} \beta = 1 \quad \text{práve vtedy ak } \alpha \leq \beta, \quad (I1)$$

$$1 \xrightarrow{R} \beta = \beta, \quad (I2)$$

$$\xrightarrow{R} \text{ je nerastúca v 1. argumente a neklesajúca v 2. argumente. } (I3)$$

- tri S-implikácie odpovedajúce fuzzy disjunkciám:

- Štandardná fuzzy disjunkcia odvodzuje

$$\alpha \xrightarrow[S]{S} \beta = \neg_S \alpha \vee_S \beta = \max\{1 - \alpha, \beta\}$$

- Lukasiewiczová fuzzy disjunkcia odvodzuje

$$\alpha \xrightarrow[L]{S} \beta = \neg_S \alpha \vee_L \beta = \begin{cases} 1 & \text{pre } \alpha \leq \beta \\ 1 - \alpha + \beta & \text{inak} \end{cases}$$

- Súčinová fuzzy disjunkcia odvodzuje

$$\alpha \xrightarrow[P]{S} \beta = \neg_S \alpha \vee_P \beta = 1 - \alpha + \alpha \cdot \beta$$

- dve Q-implikácie odpovedajúce fuzzy konjunkciám a disjunkciám:

- Štandardná fuzzy konjunkcia a disjunkcia odvodzujú

$$\alpha \xrightarrow[S]{Q} \beta = \neg_S \alpha \vee_S (\alpha \wedge_S \beta)$$

- Lukasiewiczová fuzzy konjunkcia a disjunkcia odvodzujú

$$\alpha \xrightarrow[L]{Q} \beta = \neg_S \alpha \vee_L (\alpha \wedge_L \beta) = \max\{1 - \alpha, \beta\}$$

Fuzzy ekvivalencia

Za **fuzzy ekvivalenciu** budeme považovať akúkoľvek binárnu operáciu $\leftrightarrow: \langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle \rightarrow \langle 0, 1 \rangle$ definovanú vzťahom pre všetky $\alpha, \beta \in \langle 0, 1 \rangle$:

$$\alpha \leftrightarrow \beta = (\alpha \rightarrow \beta) \wedge (\beta \rightarrow \alpha). \quad (\text{BI})$$

- ak $\leftrightarrow$ spĺňa (I1), tak aspoň jedna zo zátvoriek na pravej strane je rovná 1 a tým nezáleží na voľbe fuzzy konjunkcie $\wedge$
- keďže pojem ekvivalencie označuje aj špeciálnu reláciu, častejšie sa používa pojem **fuzzy biimplikácie**

- tri R-biimplikácie odpovedajúce fuzzy konjunkciám:

- Gödelova fuzzy biimplikácia

$$\alpha \overset{R}{\underset{S}{\longleftrightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pre } \alpha = \beta \\ \alpha \wedge_S \beta & \text{inak} \end{cases}$$

- Lukasiewiczová fuzzy biimplikácia

$$\alpha \overset{R}{\underset{L}{\longleftrightarrow}} \beta = 1 - |\alpha - \beta|$$

- Súčinová fuzzy biimplikácia

$$\alpha \overset{R}{\underset{P}{\longleftrightarrow}} \beta = \begin{cases} 1 & \text{pre } \alpha = \beta = 0 \\ \frac{\alpha \wedge_S \beta}{\alpha \vee_S \beta} & \text{inak} \end{cases}$$