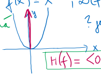
vlastnosti funkcií :

funkcia f ohraničená zhora
na $M \subset D(f)$, ak je zhora
ohraničená množina $f(M) = \{f(x); x \in M\}$

príklad : 1) $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$

? je ohraničená zhora
na celom $D(f)$? NIE JE

$\max\limits_{x \in D(f)} f(x)$ nemá



$\min\limits_{x \in D(f)} f(x) = 0$

$\boxed{H(f) = \langle 0, \infty)}$

zdola je ohraničená
↑ nie je zhora ohraničená

nie je ohraničená

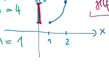
2) $f(x) = x^2$; $D(f) = \langle 1, 2\rangle$

$H(f) = \langle 1, 4\rangle$, je zhora ohraničená

je zdola ohraničená

je ohraničená

$\max\limits_{x \in \langle 1,2\rangle} f(x) = 4$



$\min\limits_{x \in \langle 1,2\rangle} f(x) = 1$

ohraničenosť zdola : f je zdola ohraničená
na $M \subset D(f)$, ak je zdola ohraničená $f(M)$

Množina je ohraničená na M, ak je na M ohraničená
aj zdola aj zhora.

MAXIMUM a MINIMUM FUNKCIE

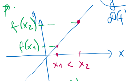
$\max\limits_{x \in M} f(x)$ $\quad$ $\min\limits_{x \in M} f(x)$

M ↓ môže byť aj celý $D(f)$

MONOTÓNNOSŤ FUNKCIE

rýdzo-monotónne funkcie { rastúca funkcia – ; klesajúca funkcia –

pr.



je rastúca

$y = x$

$D(f) = \mathbb{R}$

$x_1 < x_2$

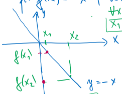
$\forall x_1, x_2 \in D(f)$; $x_1 < x_2$ platí

Ⓜ $f(x_1) < f(f_2)$

pr. $f(x) = -x$; $D(f) = \mathbb{R}$

$\forall x_1, x_2 \in D(f)$

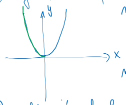
$\boxed{x_1 < x_2}$



je klesajúca na $D(f)$

$\boxed{f(x_1) > f(x_2)}$

pr. $f(x) = x^2$; $D(f) = \mathbb{R}$

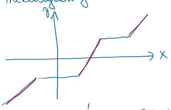


na celom $D(f)$ nie je ani rastúca, ani klesajúca

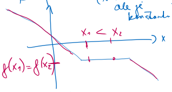
na $(-\infty, 0\rangle$ je klesajúca

na $\langle 0, \infty)$ je rastúca

pr. neklesajúca funkcia:

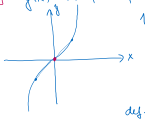


pr. nerastúca funkcia (buď klesá, ale je konštanta)



PÁRNE A NEPÁRNE FUNKCIE (P, N)

príklady $f(x) = x^3$, $D(f) = \mathbb{R}$ $\qquad$ vyšetrujem P, N



1. podmienka na $D(f)$ ÁNO PLATÍ

$\forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$

$D(f) = (-\infty, \infty)$

def. obor musí byť „SYMETRICKÝ"

2) $f(x) = x^3$

$f(-x) = (-x)^3 = \boxed{-x^3}$

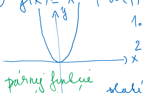
$-f(x) = \boxed{-x^3}$

$f(x) \neq f(-x)$ teda nie je P

$f(-x) = -f(x)$ funkcia f je NEPÁRNA

graf nepárnej funkcie je súmerný podľa bodu $[0,0]$

pr. $f(x) = x^4$; $D(f) = \mathbb{R}$



1. $\forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$ ✓
2. $f(x) \overset{?}{=} f(-x)$

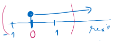
$f(x) = x^4$, $f(-x) = (-x)^4 = x^4$

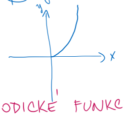
platí $f(x) = f(-x)$

JE PÁRNA

graf párnej funkcie je osovo súmerný podľa o_y

pr. $f(x) = x^2$; $D(f) = \langle 0, \infty)$





1. $\forall x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$

↓ neplatí

f nie je ani párna, ani nepárna

PERIODICKÉ FUNKCIE

príklady:

$f(x) = \sin x$

$f(x) = \cos x$

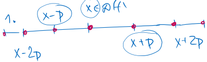
$f(x) = \operatorname{tg} x$

$f(x) = \operatorname{cotg} x$

$\ldots = f(x-p) = f(x) = f(x+p) = f(x+2p) = \ldots$

$x \in D(f)$

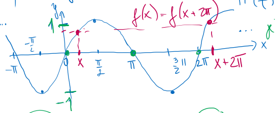
1.



príklady: $f(x) = \sin x$; $D(f) = \mathbb{R}$

$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

$f(x) = f(x + 2\pi)$



… je periodická s periódou $p = 2\pi$

$\boxed{x = 0}$, $x + p = x + 2\pi = \boxed{2\pi}$

$f(0) = 0 = f(2\pi) = f(4\pi) = \ldots$

- je nepárna
- je ohraničená

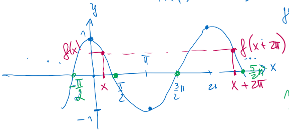
$\min\limits_{x \in D(f)} f(x) = -1$

$\max\limits_{x \in D(f)} f(x) = 1$

na celom $\mathcal{D}(f)$ nie je rastúca
ani klesajúca, ale

napr. na $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ rastie
$\langle \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi \rangle$ klesá , ...

(pr.) $f(x) = \cos x$, $\mathcal{D}(f) = \mathbb{R}$
$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$



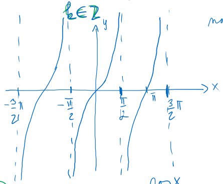
je periodická
$p = 2\pi$
je párna
je ohraničená
$\min_{x \in \mathcal{D}(f)} f(x) = -1$
$\max_{x \in \mathcal{D}(f)} f(x) = 1$

(pr.) $f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \left\{ (2k+1)\frac{\pi}{2} \right\}$ $\cos x \neq 0$
$k \in \mathbb{Z}$

nepárne

$\boxed{x \neq \boxed{(2k+1)} \cdot \frac{\pi}{2}}$ $k \in \mathbb{Z}$



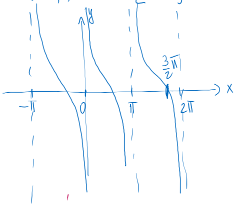
na každom intervale
$\left(-\frac{\pi}{2} + k\pi ; \frac{\pi}{2} + k\pi \right)$ je rastúca
nemá max, nemá min
nie je ohraničená

je periodická s $p = \pi$

(pr.) $y = \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$

$\mathcal{D}(f) = \mathbb{R} - \{ k.\pi \}$; $k \in \mathbb{Z}$

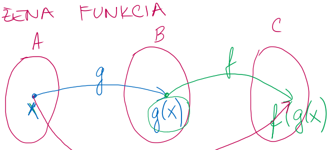
$\sin x \neq 0$
$x \neq k.\pi$
$k \in \mathbb{Z}$
. . . , −2, −1, 0, 1, 2, 3, . . .



nie je ohraničená
nemá max, min

je periodická
$p = \pi$

ZLOŽENÁ FUNKCIA



$f(g(x)) : A \to C$

vonkajšia zložka
vnútorná zložka

príklad:

$g(x) = x^2$
$f(x) = \sin x$

$f(g(x)) = \sin x^2$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "g"] & x^2 \arrow[r, bend left, "f"] & \sin x^2 \end{tikzcd}$$

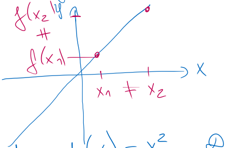
$g(f(x)) = (\sin x)^2$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "f"] & \sin x \arrow[r, bend left, "g"] & (\sin x)^2 \end{tikzcd}$$

PROSTÁ FUNKCIA

$f: \underset{\overset{\parallel}{D(f)}}{A} \to B$ $\quad \forall x_1, x_2 \in D(f),\ x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$

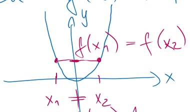
príklad: $f(x) = x$; $D(f)$ JE PROSTÁ



každá rýdzo monotónna funkcia je prostá

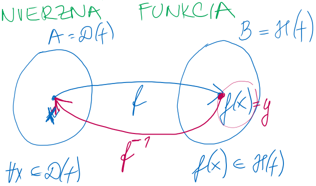
príklad: $f(x) = x^2$, $D(f) = \mathbb{R}$

nie je prostá



ak $x_1 = -1$ $\quad f(-1) = 1$
$x_2 = 1$ $\quad f(1) = 1$

INVERZNÁ FUNKCIA



! f je PROSTÁ !

$f^{-1}: B \to A$

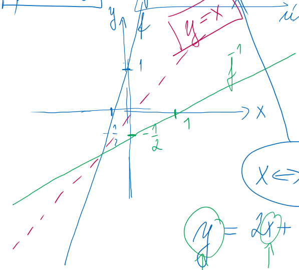
$f^{-1}(y) = f^{-1}(f(x)) =$

$= x$

$f: x \to f(x)$

$f^{-1}: f(x) \to x$

$\boxed{\text{príklad}}$ $\quad f(x) = 2x + 1$, $D(f) = \mathbb{R}$, $H(f) = \mathbb{R}$



úloha: nájdime predpis inverznej funkcie, ak $\boxed{\text{existuje}}$

Áno existuje, lebo je prostá

$x \Leftrightarrow y$

$$\underset{x}{y} = 2\underset{y}{x} + 1$$

$$x = 2y + 1$$

grafy navzájom inverzných funkcií sú symetrické podľa priamky $y = x$

$\frac{x-1}{2} = y$

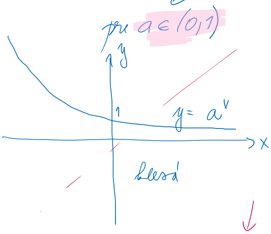
$\boxed{f^{-1}: y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}}$ $\quad D(f^{-1}) = H(f) = R$

príklad

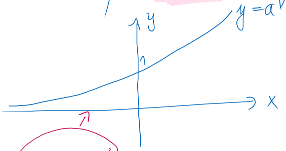
EXPONENCIÁLNA FUNKCIA

$f: y = a^x \; ; \; a > 0, a \neq 1$

pre $a \in (0,1)$



pre $a > 1$



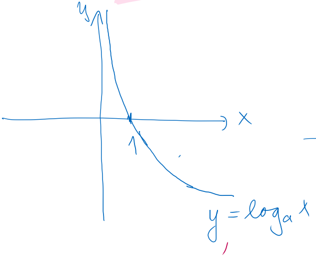
$f: y = e^x$

↓ je prostá, existuje inverzná funkcia

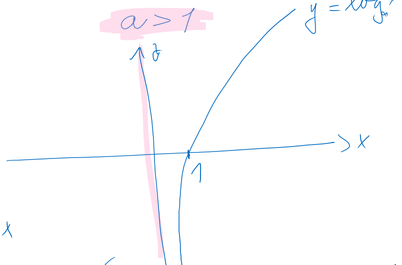
LOGARITMICKÁ FUNKCIA

$f: y = \log_a x \; ; \; a > 0, \; a \neq 1$

$a \in (0,1)$



$a > 1$



CYKLOMETRICKÉ FUNKCIE (inverzné ku goniometrickým)

! zúženým ! (aby boli prosté)

1) $f: y = \sin x$

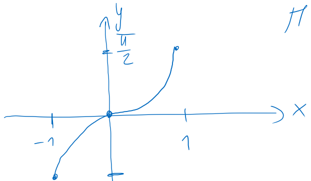
$x \in \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$ je prostá (rastie)

↓

$H(f) = \langle -1, 1 \rangle$

$f^{-1}: \boxed{y = \arcsin x}$, $D(f^{-1}) = \langle -1, 1 \rangle$

$H(f^{-1}) = \langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$



$-\frac{\pi}{2}$

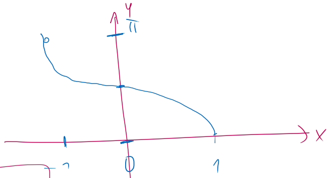
2) $f: \underline{y = \cos x, \quad x \in \langle 0, \pi \rangle}$

klesá, teda je prostá

$\exists\ f^{-1}: y = \arccos x;$

$D(f^{-1}) = \langle -1, 1 \rangle$

$H(f^{-1}) = \langle 0, \pi \rangle$

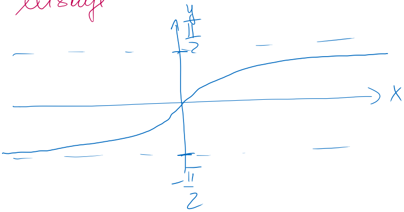


3) $\boxed{y = \mathrm{tg}\, x; \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)}$, $H(f) = \mathbb{R}$

je prostá

$\exists$ existuje $f^{-1}: y = \mathrm{arctg}\, x;$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

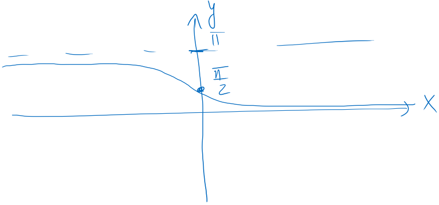
$H(f^{-1}) = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



④ $\underline{y = \mathrm{cotg}\, x; \quad x \in (0, \pi)}$, je prostá

$H(f) = \mathbb{R}$

$f^{-1}: y = \mathrm{arccotg}\, x;$ $D(f^{-1}) = \mathbb{R}$

$H(f^{-1}) = (0, \pi)$