DOBRÉ RÁNO :)

LIMITA FUNKCIE

príklad ① $f(x)=\frac{x^2+x-2}{x-1}$, $D(f)=\mathbb{R}-\{1\}$

? ako sa správa $f(x)$ na okolí bodu 1 $\boxed{O^\circ(1)}$

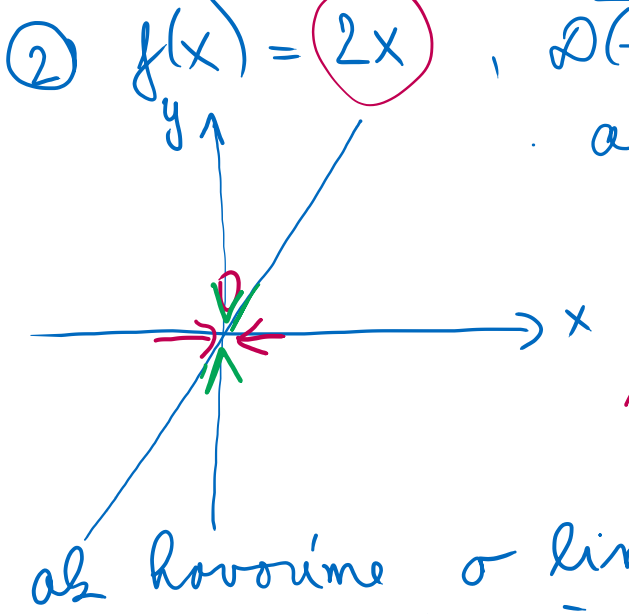
$\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$ $x+2$

x	…	0,9	0,99	1	1,01	1,1	…
$f(x)$		2,9	2,99	N	3,01	3,1	

ak $x\to1$ $f(x)\to3$ funkcia nie je defin. v bode 1!

môžeme písať $\boxed{\lim_{x\to1} f(x)=3}$

② $f(x)=2x$, $D(f)=\mathbb{R}$



ako sa správa $f(x)$ na okolí bodu $x=0$

definovaná na okolí bodu 0, aj v bode 0

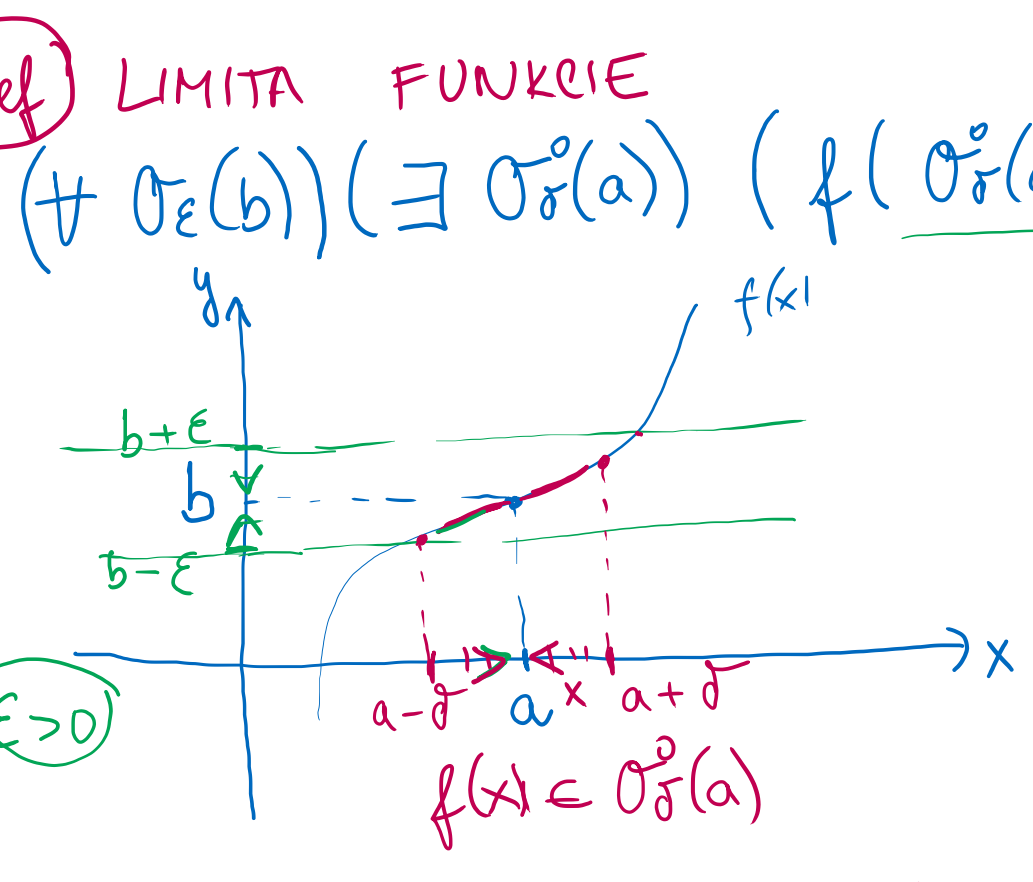
ak $x\to0$ $f(x)\to0 = f(0)$

$\lim_{x\to0} f(x)=f(0)=0$

" ak hovoríme o limite $\boxed{f(x) \text{ v bode } a}$ tak funkcia musí byť definovaná na $O^\circ(a)$ a znamená to, že ak x je blízko pri a, tak $f(x)$ je blízko pri b" $\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b}$

Def LIMITA FUNKCIE

$(\forall O_\varepsilon(b))(\exists O^\circ_\delta(a))\,(f(O^\circ_\delta(a))\subset O_\varepsilon(b))$

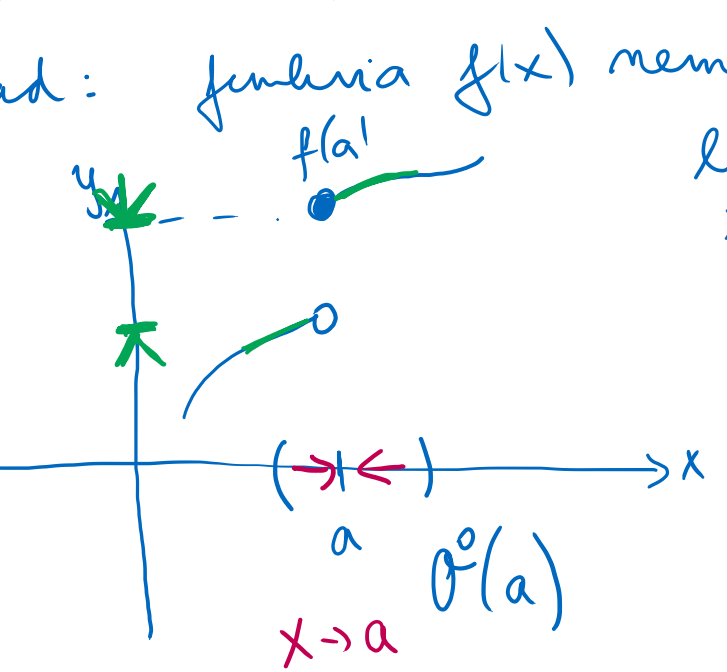


$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b}$

! Funkcia má v bode nanajvýš 1 limitu!

(funkcia buď má v bode 1 limitu, alebo nemá v bode limitu)

príklad: funkcia $f(x)$ nemá v bode a limitu $\lim_{x\to a} f(x)$ neexistuje



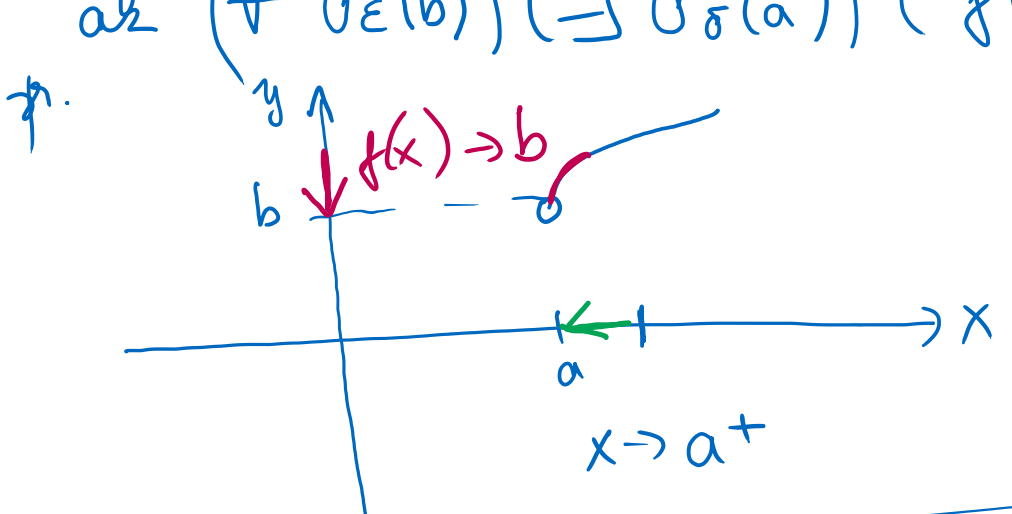
$\boxed{\lim_{x\to a} f(x)=b}$ ak $x\to a$ potom $f(x)\to b$

Jednostranné limity

limita sprava: $\boxed{\lim_{x\to a^+} f(x)=b}$

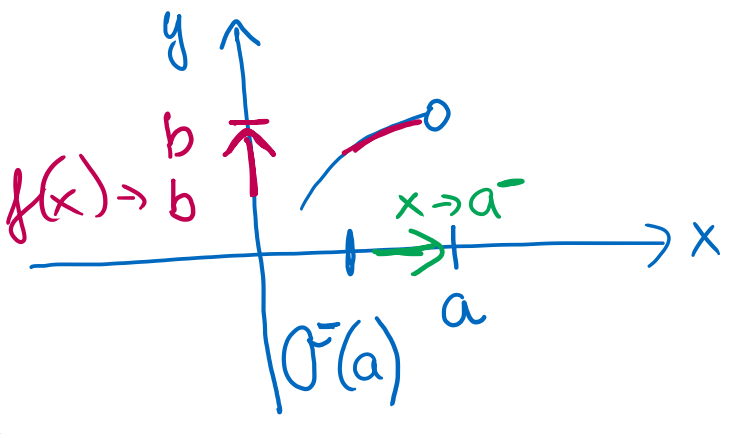
ak $(\forall O_\varepsilon(b))(\exists O^+_\delta(a))\,(f(O^+_\delta(a))\subset O_\varepsilon(b))$

pr.



limita zľava: $\boxed{\lim_{x\to a^-} f(x)=b}$

ak $(\forall O_\varepsilon(b))(\exists O^-_\delta(a))\,(f(O^-_\delta(a))\subset O_\varepsilon(b))$



VETA Funkcia má v bode a limitu práve vtedy, ak má v bode a limitu sprava aj zľava a platí

$$\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a} f(x)$$

vlastná limita: ak b je vlastné číslo

nevlastná limita: ak b je nevlastné číslo

VLASTNOSTI VLASTNÝCH LIMIT

pr. $\lim_{x\to1} x=1$ $\lim_{x\to1}(-x)=-1$

$\lim_{x\to1}|-x|=1$

pr② $\lim_{x\to1}(x+4x^2)=$
$=1+4.1=\underline{5}$

pr③ $\lim_{x\to a}(k.f(x))=k\lim_{x\to a} f(x)=k.b$

pr. $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$ ($f(x)\to0$, $g(x)$ je ohraničená)

pr⑥ $\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\sin x\right)=0$ ($\frac1x\to0$, $\sin x$ je ohraničená)

$\lim_{x\to\infty}\frac1x=\left(\frac1\infty\right)=0$

$\boxed{\frac{1}{\pm\infty}\to0}$

limity v nevlastnom bode: $a=\infty$ resp. $a=-\infty$

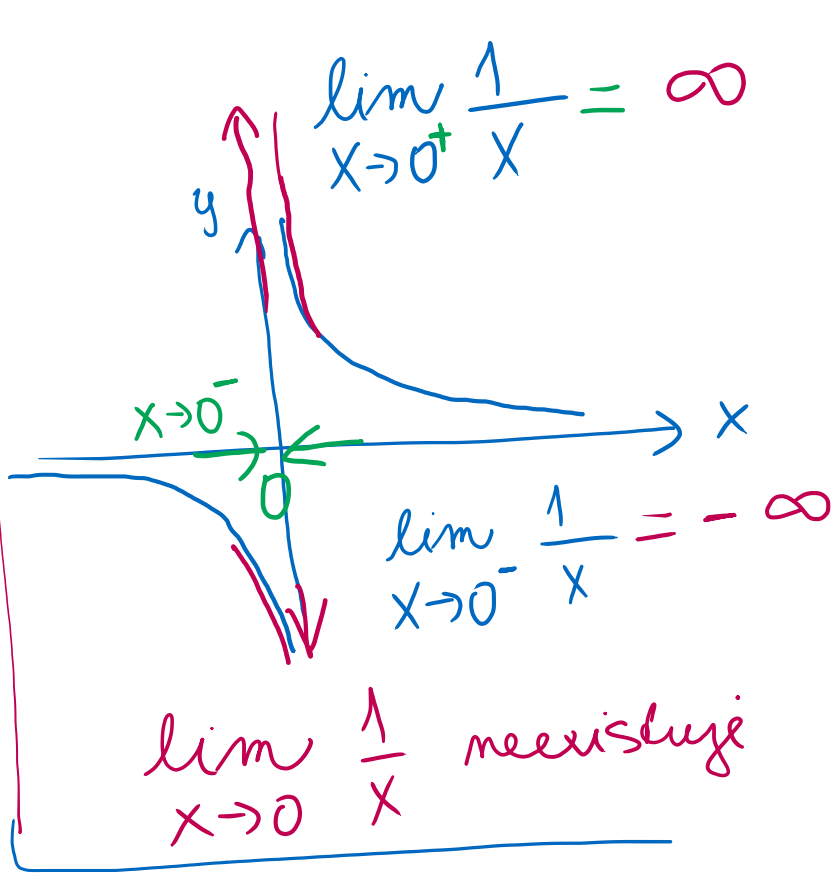
VLASTNOST NEVLASTNÝCH LIMÍT

③ $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\boxed{\left(\frac{1}{0^-}\right)=-\infty}$ kde $\lim_{x\to a} f(x)=0$ $(f(x)<0)$

④ $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\boxed{\left(\frac{1}{0^+}\right)=\infty}$ ak $f(x)\to0$ (kde $f(x)>0$)

(príklad: $\lim_{x\to\infty}\boxed{x}=\infty$

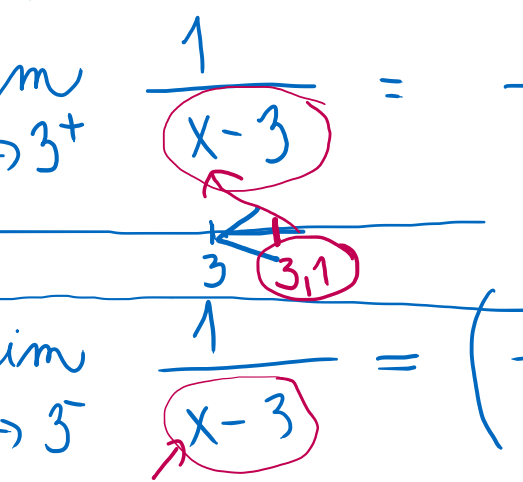
$\lim_{x\to0^+}\frac1x=\infty$



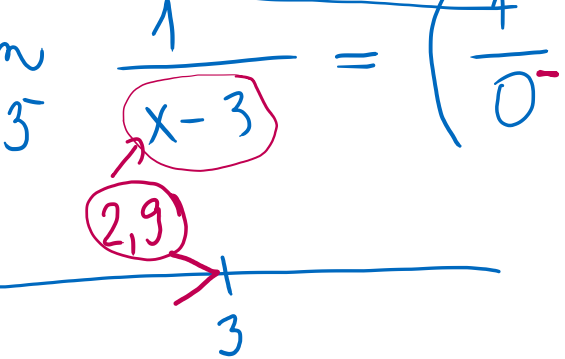
$\lim_{x\to0^-}\frac1x=-\infty$

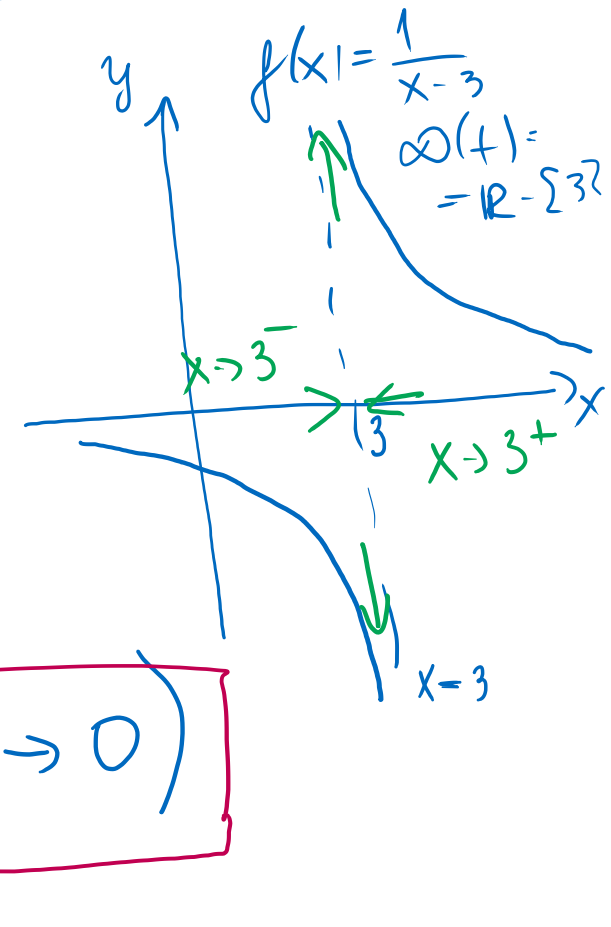
$\lim_{x\to0}\frac1x$ neexistuje

príklad: $\lim_{x\to3^+}\frac{1}{x-3}=\frac{1}{0^+}=\infty$



$\lim_{x\to3^-}\frac{1}{x-3}=\left(\frac{1}{0^-}\right)=-\infty$





⑤ ak $\lim_{x\to a} f(x)=\pm\infty$ tak $\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=0$ $\boxed{\left(\frac{1}{\pm\infty}\to0\right)}$

POČÍTANIE S NEVLASTNÝM ČÍSLOM $(\pm\infty)$

$\infty+\infty=\infty$

$(k>0)$ $k.\infty=\infty$

$(k<0)$ $k.\infty=-\infty$

$\boxed{\infty-\infty}$ NEURČITÝ VÝRAZ 0? , 29?, 1?, ∞? nevieme

príklady:

1) $\lim_{x\to\infty}(2x-x)=\lim_{x\to\infty}x=\infty$ ($2x\to\infty$, $x\to\infty$)

2) $\lim_{x\to\infty}(30x^2-x^2)=\lim_{x\to\infty}(29x^2)=\infty$ ($\infty-\infty$)

3) $\lim_{x\to\infty}(x^2-(x^2-29))=\lim_{x\to\infty}29=29$ $\left[\lim_{x\to a}k=k\right]$

$\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$ NEURČITÝ VÝRAZ príklady:

① $\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x}=\lim_{x\to\infty}2=\boxed{2}$

② $\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\boxed{100}=\boxed{100}$

NEURČITÉ VÝRAZY:

$\frac\infty\infty,\ \infty-\infty,\ \frac00,\ 0.\infty,\ 1^\infty,\ \infty^0,\ 0^0$

VÝPOČET LIMÍT: postup: 1) dosadím $x\to a$

2) ak vznikne neurčitý výraz, upravujem predpis funkcie s cieľom odstrániť neurčitosť

PRÍKLADY

① $\lim_{x\to2}\frac{x^3-2x^2+x-2}{x^2+x-6}=\left(\frac00\right)=\lim_{x\to2}\frac{x^2(x-2)+(x-2)}{(x-2)(x+3)}=$ (neurčitý výraz)

$=\lim_{x\to2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+1)}{\cancel{(x-2)}(x+3)}=\lim_{x\to2}\frac{x^2+1}{x+3}=\frac55=\underline{\underline{1}}$

② $\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}=\left(\frac00\right)=\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{3x+1}-1}{x}\cdot\frac{\sqrt{3x+1}+1}{\sqrt{3x+1}+1}$ (= 1)

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$=\lim_{x\to0}\frac{3x+1-1}{x(\sqrt{3x+1}+1)}=\lim_{x\to0}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}(\sqrt{3x+1}+1)}=\underline{\underline{\frac32}}$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{4x^2+x+3}=\left(\frac\infty\infty\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{4x^2+x+3}\cdot\frac{\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x^2}}$ (neurčitý výraz) $\cdot1$

$=\lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac2x+\frac{5}{x^2}}{4+\frac1x+\frac{3}{x^2}}=\frac34$

zrýchlený výpočet: $\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x+5}{4x^2+x+3}=\frac34$

(ak v čitateli a menovateli je rovnaký stupeň polynómu), (stačí zobrať koeficienty pri najvyšších mocninách)

pr. $\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-5x}{-3x^3+2x^2-18}=-\frac43$

pr. $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{x}=\infty$ (v čitateli je polynóm vyššieho stupňa ako v menovateli výsledok: $\pm\infty$)

pr. $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^3+1}=0$ (naopak)

zapamätáme si: $\lim_{x\to\infty}\frac{\text{polynóm}}{\text{polynóm}}$ počítame spamäti

VZORCE: $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ (zdôvodníme)

$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac1x\right)^x=e$

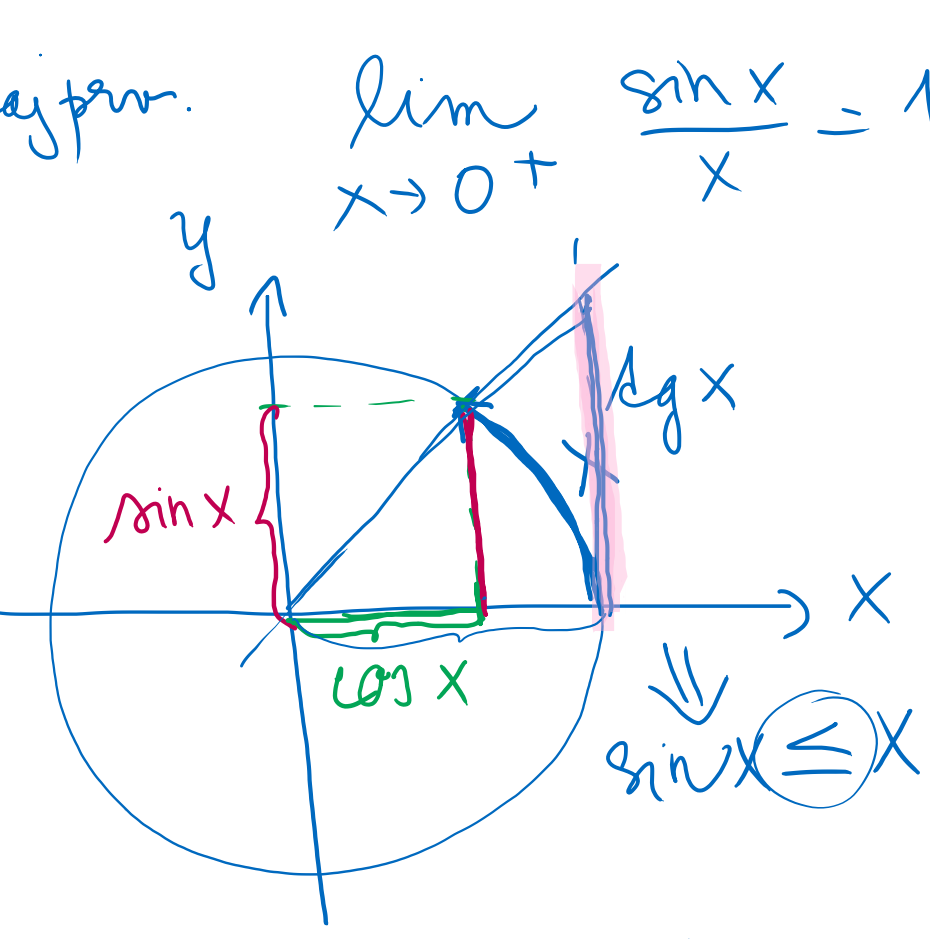
$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{k}{f(x)}\right)^{f(x)}=e^k$ (kde $f(x)\to\infty$ pre $x\to\infty$)

VETA nech existuje $O^\circ(a)$ také, že $\forall x\in O^\circ(a)$ platí $\boxed{h(x)}\le f(x)\le\boxed{g(x)}$ a $\lim_{x\to a}h(x)=b$, $\lim_{x\to a}g(x)=b$,

potom $\boxed{\lim_{x\to a}f(x)=b}$

ukážeme platnosť $\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$

najprv $\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1$; $\boxed{x\in\left(0,\frac\pi2\right)}$



$\frac{\operatorname{tg}x}{1}=\frac{\sin x}{\cos x}$ z podobnosti △

$\Downarrow$ $\sin x\le x\le\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}\ \Big|\cdot\frac{1}{\sin x}$

$1\le\frac{x}{\sin x}\le\frac{1}{\cos x}$

$1\ge\frac{\sin x}{x}\ge\cos x$; $x\in\left(0,\frac\pi2\right)$

$\lim_{x\to0^+}1=1$ $\lim_{x\to0^+}\cos x=1$

$\boxed{\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1}$

príklady o týždeň + význam limity

SPOJITOSŤ FUNKCIE

DERIVÁCIA FUNK.