

DOBŘE RÁNO:)

vzťah $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) = 1$

príklad: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

{podobné úpravy pri limitách: $+0, \cdot 1$ }

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 - \cos x)}{x^2} \cdot \frac{(1 + \cos x)}{(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2(1 + \cos x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2(1 + \cos x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \right)$$

vzťah: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{f(x)} \right)^{f(x)} = \left(1^\infty \right) = e$

príklad 1) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{3x+4} = \left(1^\infty \right) =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+4-3}{3x+4} \right)^{3x+4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{3x+4} = e^{-3}$$

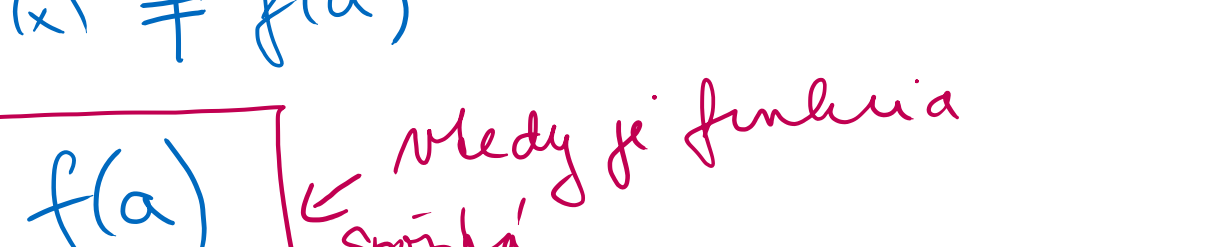
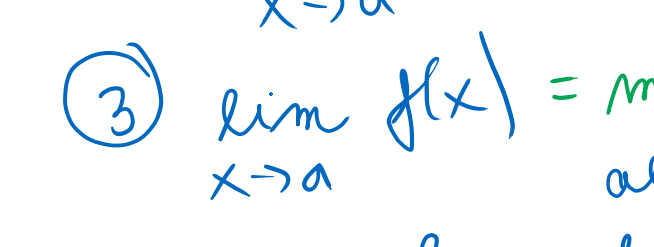
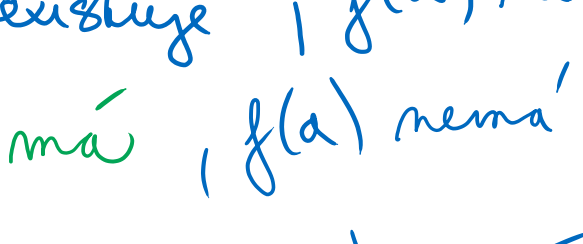
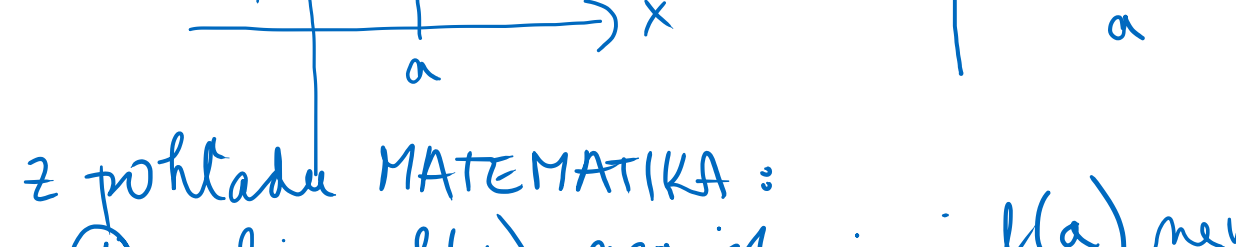
2) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+1}{3x+4} \right)^{4x-2} = \left(1^\infty \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{4x-2} =$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{\frac{(3x+4)(4x-2)}{3x+4}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{\frac{4x-2}{1} \cdot \frac{3x+4}{3x+4}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{-3}{3x+4} \right)^{\frac{4x-2}{3x+4} \cdot (3x+4)} = \left(e^{-3} \right)^{\frac{4}{3}} = e^{-\frac{4}{3}}$$

SPŮJITOST FUNKCE

PRÍKLAD:



2 pohľady MATEMATIKA:

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ neexistuje, $f(a)$ nemá

2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m\bar{a}$, $f(a)$ nemá

3) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = m\bar{a}$, $f(a)$ má

ale $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$

4) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ $\leftarrow$ vtedy je funkcia spojita

Def: Nech f je definovaná na $O(a)$ (aj v bode a).
 Ispovíme, že f je spojita v bode a , ak

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

jednosmerná spojitosť: SPOJITOSŤ SLEVA v bode SPOJITOSŤ ZDOLA v bode

SPŮJITOST FUNKCIE: spojitosť v každom bode $D(f)$

každá elem. funkcia je spojita na svojom $D(f)$.

SPŮJITOST FUNKCIE na (a,b) .

—||— na $[a,b]$

Body nespojitosti funkcie: kam, kde funkcia má spojitosť (ale nie na okolí)

1. druhu: $\exists$ $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$



$$\exists \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b, \exists \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = c$$

2. body nespojitosti 2. druhu



Klasická spojitosť funkcie: ...

Spojitosť zložených funkcií:

1) g ... spojita v bode a

2) f ... spojita v bode $g(a)$

3) $f(g(x))$ je tiež spojita v bode a .

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = g(a), \lim_{x \rightarrow g(a)} f(x) = f(g(a)) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a))$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(g(a)) = f\left(\lim_{x \rightarrow a} g(x)\right)$$

! použijeme pri výpočte limit!

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln x = \ln \lim_{x \rightarrow a} x$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \ln^2 x = \ln^2 \lim_{x \rightarrow a} x$$

Klasická spojitosť funkcie na $[a,b]$:

1) $f(x)$ nadobúda MIN aj MAX

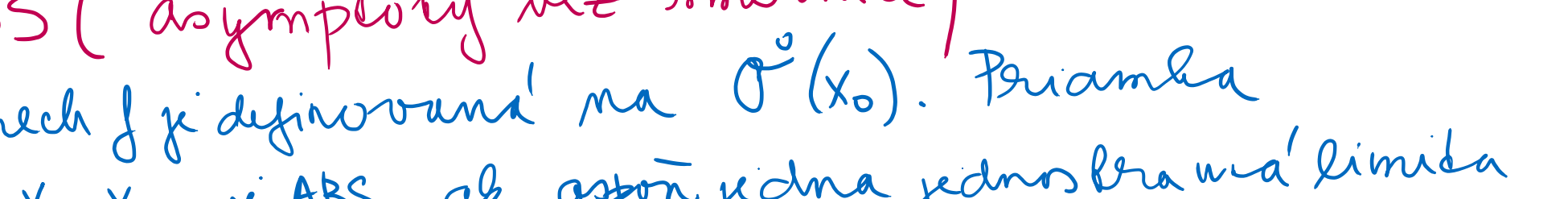
2) $f(x)$ nadobúda každú hodnotu medzi MIN a MAX



UVEĎA Bolzanova

nech $f(x)$ je spojita na $[a,b]$, nech $f(a) \cdot f(b) < 0$.

Potom $\exists c \in (a,b)$ taký, že $f(c) = 0$.



Príklad: $f(x) = \frac{1}{x}$

$D(f) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$X=0$ je ABS

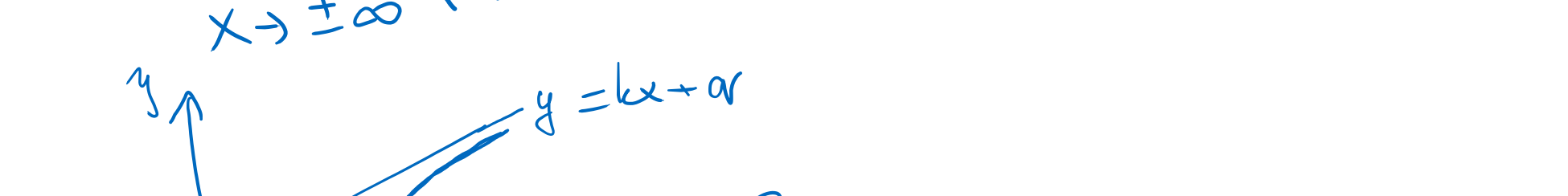
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \frac{1}{0^+} = \infty$$

ASS (asymptoty so smetnicou)

Charakterizujú správanie na okolí bodov nespojitosti a na okolí $-\infty$ (resp. ∞)

Príklad: $y = kx + q$ je ASS pre $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (kx + q)) = 0$$



Výpočet ASS: $k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \in \mathbb{R}$

$$q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - kx) \in \mathbb{R}$$

Príklad: $f(x) = \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2}$ máme ABS, ASS

ABS: $X = -2$ je ASS

$$\lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{-3}{0^-} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2^+} \frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$$

ASS: začneme pri $x \rightarrow \infty$

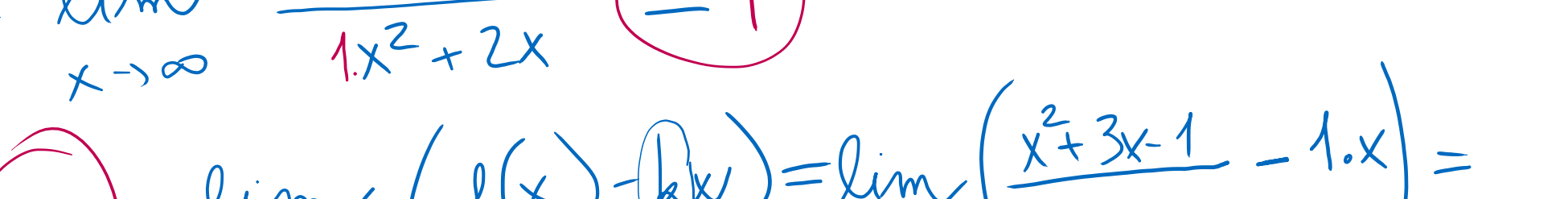
$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1}{x^2} = 1$$

$$q = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 3x - 1}{x + 2} - 1 \cdot x \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 1 - x^2 - 2x}{x + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x - 1}{x + 2} = 1$$

pre $x \rightarrow \infty$ je priamka $y = x + 1$ ASS

(pre $x \rightarrow -\infty$ podobne vypočítame)



! POZOR dnes bude MAT 1 aj počas prednášky

10 min prednáška, potom pokračujeme