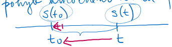
DERIVÁCIA FUNKCIE

príklad ①

pohyb hmotného bodu po priamke.



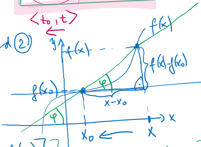
za časový interval $\langle t_0, t\rangle$ je prejdená dráha $s(t)-s(t_0)$

$$\text{rýchlosť} = \frac{\overset{\text{dráha}}{s(t)-s(t_0)}}{\underset{\text{čas}}{t-t_0}}$$

$$\boxed{\lim_{t \to t_0} \frac{s(t)-s(t_0)}{t \to t_0}} = \text{okamžitá rýchlosť}$$

$\langle t_0, t\rangle$ ←

príklad ②



$$k = \operatorname{tg}\varphi = \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$[x_0, f(x_0)]$
$[x, f(x)]$ } priamka prechádza dvoma bodmi } ? smernica tejto priamky

? čo sa udeje s priamkou ak $x \to x_0$?

priamka sa stane dotyčnicou:

teda $$\lim_{x \to x_0} \boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = k_t$$

smernica sečnice

smernica dotyčnice

smernica dotyčnice ku grafu funkcie $f(x)$ v bode $[x_0, f(x_0)]$

Derivácia funkcie:

Nech f je definovaná na okolí bodu x_0 (aj v bode x_0)

Ak existuje $$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}},$$ tak

túto limitu nazývame deriváciou $f(x)$ v bode x_0.

! vlastná limita!

označenie: $f'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$

{ alternatívny zápis: $h = x - x_0$

ak $x \to x_0$, tak $h \to 0$

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$$ }

príklad $f(x) = \sqrt{x}$, $D(f) = \langle 0; \infty)$

nech $x_0 \in D(f)$ a počítajme $f'(x_0)$.

Podľa def. derivácie počítam:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} = \left(\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x_0+h}-\sqrt{x_0}}{h} \cdot \boxed{\frac{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}}} = 1 =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0}+\cancel{h}-\cancel{x_0}}{\cancel{h}\left(\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}\right)} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x_0+h}+\sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

teda pre ľub. $x \in D(f)$; $x > 0$

$$\left[\sqrt{x}\right]' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

! $f'(x_0)$ je číslo ; $f'(x)$ je opäť funkcia

v bode

pre $x \in D(f)$

DERIVÁCIA funkcia sprava zľava

def. na pravom okolí bodu x_0

a existuje $\lim\limits_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_+(x_0)$

derivácia sprava v bode x_0

f definovaná na istom ľavom okolí x_0

a existuje $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim\limits_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'_-(x_0)$

derivácia zľava v bode x_0

VETA f má v bode x_0 deriváciu práve vtedy, ak

$$f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0).$$

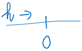
príklad $\boxed{f(x)=|x|}$, $D(f)=R$

nech $\boxed{x_0=0}$

počítajme jednostranné derivácie v bode

$$f'_-(x_0=0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{|\overset{0}{x_0}+h|-|\overset{0}{x_0}|}{h}=$$

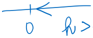
$$=\lim_{h\to 0^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^-}\frac{-h}{h}=\boxed{-1}$$



$h<0$

$$f'_+(x_0=0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{|\overset{0}{x_0}+h|-|\overset{0}{x_0}|}{h}=$$

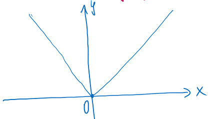
$$=\lim_{h\to 0^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to 0^+}1=\boxed{1}$$



$h>0$

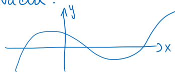
ZÁVER: $f'_-(0)\neq f'_+(0)$

teda v bode 0 neexistuje derivácia f(x)



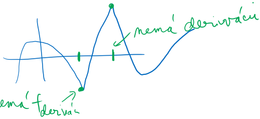
body, kde sú „hroty" sú body, kde funkcia nemá deriváciu!

p.



← má všade deriváciu

pr.



VZŤAH: spojitosť a derivácia funkcie v bode.

VETA Ak má funkcia f v bode x_0 deriváciu, tak je v bode x_0 spojitá.

~~? platí to aj naopak spojitosť ⟹ ⟹ deriváciu?~~ neplatí

Dôkaz:

predpoklad: existuje vlastná limita $\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$

počítajme $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right) = \lim_{x\to x_0} \frac{\left(f(x)-f(x_0)\right)\boxed{(x-x_0)}}{\boxed{x-x_0}}$

$= \lim_{x\to x_0} \underbrace{\boxed{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}}_{\text{existuje vlastná}} \cdot \boxed{(x-x_0)} = 0$

$(x-x_0) \to 0$

zistili sme, že $\lim_{x\to x_0}\left(f(x)-f(x_0)\right)=0$

teda $\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)}$

teda funkcia f je v bode x_0 spojitá.

PRAVIDLÁ PRE VÝPOČET DERIVÁCIE

VETA Nech f, g má deriváciu na otvorenom interv. I.
nech $c \in \mathbb{R}$. Potom platí

1) $[c.f(x)]' = c.f'(x)$

2) $[f(x) \pm g(x)]' = f'(x) \pm g'(x)$

3) $[f(x).g(x)]' = f'(x).g(x) + f(x).g'(x)$ (dokážeme o chvíľu)

4) $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$ (pomôcka k 5))

5) $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x).g(x) - f(x).g'(x)}{g^2(x)}$ ↙ (dokážeme)

Dôkaz: ③ vezmime ľubovoľné $x \in J$

$$[f(x)\cdot g(x)]' \underset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\,g(x)}{h} =$$

podľa def. derivácie

FINTA

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) \overbrace{- f(x)g(x+h) + f(x)g(x+h)}^{=0} - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left[\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{f'(x)} \cdot \underbrace{g(x+h)}_{g(x)} + \underbrace{f(x)}_{f(x)} \underbrace{\frac{[g(x+h)-g(x)]}{h}}_{g'(x)} \right]$$

$$= f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$$

4) ukážeme najprv, že $\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = -\frac{g'(x)}{g^2(x)}$

$$\left[\frac{1}{g(x)}\right]' = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1}{g(x+h)} - \frac{1}{g(x)}}{h} =$$

definícia derivácie

nech $x \in J$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{g(x) - g(x+h)}{h\cdot g(x)\cdot g(x+h)} = \lim_{h\to 0} - \underbrace{\frac{(g(x+h) - g(x))}{h}}_{g'(x)} \cdot \frac{1}{\underbrace{g(x)}_{g(x)}\cdot\underbrace{g(x+h)}_{g(x)}} = \boxed{-\frac{g'(x)}{g^2(x)}}$$

⑤ $$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \left[f(x)\cdot\frac{1}{g(x)}\right]' \underset{\uparrow}{=} f'(x)\left(\frac{1}{g(x)}\right) + f(x)\cdot\left(\frac{1}{g(x)}\right)' =$$

využijem pravidlo pre deriváciu súčinu.

$$= f'(x)\cdot\frac{1}{g(x)} + f(x)\cdot\left(-\frac{g'(x)}{g^2(x)}\right) = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

DERIVÁCIA ZLOZENEJ FUNKCIE

Veta Nech $g : I \to J$ má deriváciu na I.
$f : J \to \mathbb{R}$ má —||— na J.
Potom $f(g(x))$ má deriváciu na I a platí

$$\boxed{\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)}$$

Dôkaz: použijem definíciu derivácie v zápise

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

spočítajme

$$\left[f(g(x_0))\right]' = \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} =$$

pre $x = x_0$

$x_0 \in I$

definícia derivácie

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{x - x_0} \cdot \boxed{\frac{g(x) - g(x_0)}{g(x) - g(x_0)}} = 1 \quad =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \underbrace{\frac{f(g(x)) - f(g(x_0))}{g(x) - g(x_0)}}_{f'(g(x_0))} \cdot \underbrace{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}_{g'(x_0)}$$

$$\left[f(g(x))\right]' = f'(g(x)) . g'(x)$$

DERIVÁCIA INVERZNEJ FUNKCIE

$$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

DERIVÁCIE ELEMENTÁRNYCH FUNKCIÍ

příklady 1) $[158]' = 0$

2) $[x^2]' = 2x$ $\quad [x^5]' = 5x^4$

$\left[\frac{1}{x^3}\right]' = [x^{-3}]' = -3 . x^{-4}$