DOBŘE ANO :)

dále užitečné vzorce:

I. $[\sin^2 x]' = \sin 2x$

II. $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$

III. $[\operatorname{arctan} x]' = \frac{1}{1+x^2}$

$\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$

I: $\underset{x\to 0}{\lim}\frac{\sin x}{x} = \underset{h\to 0}{\lim}\frac{f(x+h)-f(h)}{h}$.

$= \underset{h\to 0}{\lim}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \underset{h\to 0}{\lim}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{x+h-x}{2}}{h} = \underset{h\to 0}{\lim}\frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\sin\frac{h}{2}}{h} =$

$= \underset{h\to 0}{\lim}\cos\frac{2x+h}{2}\cdot\frac{\sin\frac{h}{2}}{h} = \underbrace{\underset{h\to 0}{\lim}\cos\frac{2x+h}{2}}_{\cos x}\cdot\underbrace{\underset{\frac{h}{2}\to 0}{\lim}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}}_{1} = \cos x$ hotovo

I. $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\left[\frac{\sin x}{\cos x}\right] = \frac{\sin x\cdot\cos x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x}$ vzorec: $\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$ hotovo

II. $\boxed{[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}$

$f(x) = \arcsin x$, $x \in \langle -1, 1\rangle$

$f'(x) = \sin x$

$\boxed{f(x) = \sin x}$

$\boxed{f'(x) = \cos x}$

vzorec: $[f^{-1}(x)]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$

$\left[f^{-1}(x)\right]' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ hotovo

$\cos(\arcsin x) = \sqrt{1-\sin^2 x}$

$\sin x = 1 - \sin x$

$\sin^2 x = 1 - \sin^2 x$

$\sin x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}$

$x \in \langle -1, 1\rangle$

$x = \langle -1, 1\rangle$

k příkladu (derivace funkce) potřebujeme + pravidlo

vzorec derivování součinu +

$[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

derivování součinu

derivování podílu

$\left[\frac{1}{\sin x}\right]' = \frac{1}{\sin^2 x}$

$\left[\frac{1}{\sin x}\right]' = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}$

$\left[\frac{1}{\cos x}\right]' = \frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\sin x}$

(+) $f(x) = 4x^2 - 2\cos x + 5\ln(\sin x)$

$f'(x) = [4x^2]' + [2\cos x]' - [5\ln(\sin x)]' = [2\cos x]' + [5\ln(\sin x)]' =$

$= 0 + 2\cdot 2x - 2\cdot\sin x + 5\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot(-\sin x)$

příklad $f(x) = x^x$ upravujeme derivování

$\boxed{f(x^{g(x)})}$! musíme napsat zápis do „obdélníku bonus"!

$\boxed{f(x^{g(x)}) = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x)\cdot\ln f(x)}}$ potřeba dvou na dohromady.

2 členy vnitř potřeba

$[x^2]' = 2x^{2-1}$

$[a^x]' = a^x \ln a$?

ne zdaleka

$\boxed{e^{\ln 0} = \heartsuit}$

$(e^{\square})' = e^{\square}$

$(\ln\square)' = \frac{1}{\square}$

příklad $f(x) = x^x$

$x^x = e^{\ln x^x} = e^{x\ln x}$

$\left[e^{x\ln x}\right]' = e^{x\ln x}\cdot\left[x\ln x\right]' =$

vnitřní funkce

$= e^{x\ln x}\left[1\cdot\ln x + x\cdot\frac{1}{x}\right]$

(+) $\left[(\sin x)^{\cos x}\right]' =$

$\left[(\sin x)^{\cos x}\right] = e^{\ln((\sin x)^{\cos x})} = e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}$

$\left[e^{\cos x\cdot\ln(\sin x)}\right] = e^{\cos x\ln(\sin x)}\cdot\left[\cos x\cdot\ln(\sin x)\right]' =$

$= e^{\cos x\ln(\sin x)}\cdot\left[-\sin x\cdot\ln(\sin x) + \cos x\cdot\frac{1}{\sin x}\cdot\cos x\right]$

$(e^{\square})' = e^{\square}$

$(\ln\square)' = \frac{1}{\square}$

ATENCE derivace funkce (vyznam) a geometrický

! $f'(x_0)$ je směrnice tečny ke grafu funkce $f(x)$ v dotykovém bodě $T=[x_0, y_0]$

normála dotyčnice

$\boxed{t:\ y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)}$

k_t

normála směrnicový (kolmá na dotyčnice v podobném bodě $T = [x_0, f(x_0)]$)

$\boxed{n:\ y - f(x_0) = \frac{1}{-f'(x_0)}(x - x_0)}$

k_n

příklad: najděte normálu dotyčnice a normálu ke grafu funkce $f(x) = x^3 - 2x$ v dotykovém bodě $T = [x_0, y_0]$

$x_0 = 1$

$y_0 = f(x_0) = 1^3 - 2\cdot 1 = -1$

potřebuju $f'(x)$

$f(x) = [x^3 - 2x]' = 3x^2 - 2$

$f'(x_0 = 1) = [3x^2 - 2]_{x=1} = 3\cdot 1 - 2 = 1 = k_t$

$t:\ y - (-1) = 1(x - 1)$

$y + 1 = x - 1$

$t:\ y = x - 2$

$n:\ y - (-1) = \frac{1}{1}(x - 1)$

$y + 1 = -x + 1$

$n:\ \boxed{y = -x}$

DERIVACE VYŠŠÍCH ŘÁDŮ

$(f'(x))' = f''(x)$ druhá derivace funkce

$(f''(x))' = f'''(x)$ derivace třetího řádu

$\vdots$

$f^{(n)}(x), f^{(n)}(x) \ldots \boxed{(f^{(n-1)})'}(x)$ derivace n-tého řádu

příklad $f(x) = \left(\frac{1}{x^2} + 2\right) - x^4$

$f'(x) = -2x^{-3} + 4x^3$

$f''(x) = (-2)\cdot(-3)\cdot x^{-4} + 4\cdot 3x^2 = \boxed{6x^{-4} + 12x^2}$

$f'''(x) = -24\cdot x^{-5} + 24x$

$\frac{x - x_0}{x - x_0} = 1$

2) pravidlo derivace funkce při výpočtu limit

Hospitalovo pravidlo

$\uparrow$ $\boxed{\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x)}{g(x)}} = \left(\frac{f(x_0)=0}{g(x_0)=0}\right) = \underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x) - \overset{0}{f(x_0)}}{g(x) - \overset{0}{g(x_0)}} = \underset{x\to x_0}{\lim}\frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}}$

nesmíme výpočet dělit

$= \frac{\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \boxed{\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}}$ (propojení limity, podílu a derivace)

Hospitalovo pravidlo

VĚTA: Nech fce mají derivace na $O^*(x_0)$, $x_0 \in \mathbb{R}^*$

a nech platí jedna ze podmínek

1) $\underset{x\to x_0}{\lim} f(x) = \underset{x\to x_0}{\lim} g(x) = 0$ $\left(\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}\right)$

2) $\underset{x\to x_0}{\lim}|f(x)| = \underset{x\to x_0}{\lim}|g(x)| = \infty$ $\left(\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}\right)$

Ak existuje $\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, tak existuje aj $\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x)}{g(x)}$

a platí

$\boxed{\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x)}{g(x)} = \underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f'(x)}{g'(x)}}$

poznámka: Hospitalovo pravidlo

! je potřeb dvou funkcí

$\underset{x\to x_0}{\lim}\frac{f(x)}{g(x)}$ $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}\right)$ nebo

příklady:

1) $\underset{x\to 0}{\lim}\frac{\sin x}{x} = 1$ vzorec

$\underset{x\to 0}{\lim}\frac{\sin x}{x} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \underset{x\to 0}{\lim}\frac{\cos x}{1} = 1$

2) $\underset{x\to 0}{\lim}\frac{\cos x - \cos x}{x^2} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \underset{x\to 0}{\lim}\frac{-\sin x - 2\cos x(-\sin x)}{2x} = \underset{x\to 0}{\lim}\frac{-\sin x + 3\sin x\cos^2 x}{2x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$

ale pořád je to podíl, můžeme použít LH

$\overset{LH}{=} \underset{x\to 0}{\lim}\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{1}\cdot\frac{-1 + 3\cos^2 x}{2} = 1\cdot\frac{(-1+3)}{2} = 1$

$(\cos^3 x)' = 3\cos^2 x\cdot(-\sin x)$

$(\square^3)' = 3\cdot\square^2\cdot\square'$

3) $\underset{x\to\infty}{\lim}\frac{2x^2 + 4x - 5}{3x^2 + 7} = \frac{2}{3}$ (vytýkat exponenty)

$\underset{x\to\infty}{\lim}\frac{2x^2 + 4x - 5}{3x^2 + 7} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{LH}{=} \underset{x\to\infty}{\lim}\frac{6x^2 + 4}{9x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{LH}{=}$

můžem použít aj LH

$= \underset{x\to\infty}{\lim}\frac{12x}{18x} = \frac{2}{3}$

4) $\underset{x\to 0^+}{\lim}\left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x}\right) = (\infty - \infty) = \underset{x\to 0^+}{\lim}\frac{\sin x - 2x}{2x\sin x} = \left(\frac{0}{0}\right) = (*)$

neurčitý výraz

2 můžem použít LH 2 — mez, pravá, ale ale upravím funkci na podíl, tak ANO

poznámka: $\underset{x\to x_0}{\lim}(f(x) - g(x)) = (\infty - \infty)$

funkce upravím na podíl a pak použijem LH

$(*) \overset{LH}{=} \underset{x\to 0^+}{\lim}\frac{\cos x - 2}{2\cos x + 2x\cdot\cos x} = \frac{-1}{0^+ + 0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$

už můžem použít