DŮKAZ ONO :

$\left(\frac{0}{0}\right) \cdot \left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

i L'Hopitalovo pravidlo

pravidlo $\left(\frac{0}{0}\right)$ $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ se zpravidla pokud je v plném $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ pro tyto $\lim$

pokud $\lim_{x\to 0^+} (x \ln x) = (0 \cdot (-\infty)) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty}\right) =$

$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

$x \ln x = \frac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

LH $\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+} (-x) = 0.$

pokud $\lim_{x\to 0^+} (x^{\sin x}) = (0^0)$ je nedefinovaný

$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{x} \to 0 \\ \frac{1}{x^2} \to \infty \end{array}\right.$ $(0^1, 1^\infty)$

! pokud $\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to 0^+} f(x)^{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}$! $= \lim_{x\to 0^+} e^{\ln f(x)^{\frac{1}{\frac{1}{g(x)}}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln f(x)}{\frac{1}{g(x)}}} = e^{\frac{0}{0}}$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x \cdot x}{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}} =$

$\lim_{x\to 0^+} f(x)^{g(x)}$ je nepřípustný výraz

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

$= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln(\sin x)}{\ln x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{\frac{1}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x \cdot x}{\sin x}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}} = e^{\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos x}{\frac{\sin x}{x}}} = e^{\frac{1}{1}} = e^1 = e$

$(\ln x)' = \frac{1}{x}$

$(\ln(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$

1. věta o střední hodnotě (TEORIA pro $\int_a^b$ ...) (Lagrange)

Cauchyova diferenciální formula

$f(x) = \int_a^x f'(x)dx$ $\int_a^x f'(x)dx$

$= \lim_{x\to a^+} \int_a^x f'(x)dx = \lim_{x\to a^+} \int_a^x \ln(\sin x)dx = \lim_{x\to a^+} \frac{\int_a^x \ln(\sin x)dx}{\frac{1}{x}} \overset{LH}{=}$

$= \lim_{x\to a^+} \frac{\ln(\sin x)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0}\right) \overset{LH}{=} \lim_{x\to a^+} \frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-\frac{1}{x^2}} =$

$= \lim_{x\to a^+} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot (-x^2) = \lim_{x\to a^+} \frac{\cos x}{\sin x} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right) =$

$= \lim_{x\to a^+} \frac{\cos x}{\sin x \cdot \sin x \cdot \cos x} = \lim_{x\to a^+} \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 a}$

Cauchyova diferenciální formula

Nechť f $\langle a,b\rangle \to \mathbb{R}$, nedefinuje se nutnou bodu $a \in (a,b)$ napojitá, pak existuje bod $\xi \in (a,b)$ tak $f(b) = 0$.

DŮKAZ

$f(a) = 0$ ($f(a)$ platí $\langle a,b\rangle$)

$\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$

$\lim_{x\to a^+} f(x) \geq f(a)$

$\lim_{x\to a^+} f(x) \geq 0$

nech $\frac{x-c}{x-c<0}$ tedy $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

$f'_+(c) = \lim_{x\to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$

nech $x > c$ $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} > 0$ ≥ 0

$f'_-(c) = \lim_{x\to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$

!

existuje $f'(c)$ právě když $f'_+(c) = f'_-(c) = 0$

tedy $f'(c) = 0$

$f(c) = 0$ tedy derivace je 1 s $\to x$

Věta (Rolleho věta)

Nechť f má vlastnosti

1. f spojitá na $\langle a,b\rangle$
2. má derivaci na (a,b)
3. $f(a) = f(b)$

Potom existuje aspoň 1 bod $\xi \in (a,b)$ tak, že $f'(\xi) = 0$.

DŮKAZ

$f(a) - f(b)$

nejsp. $f(b) - f(a) = 0$

$f(b) - f(a) = 0$

$\forall x \in (a,b)$ platí

$f(x) = 0$

nech $f(x)$ má v bodě ξ extrém

$f(x)$ spojitá na $\langle a,b\rangle$

$f(x) = f(\xi)$

ξ ξ ξ

Když $f(x)$ na $\langle a,b\rangle$ nabývá MIN a MAX, tedy v jednom bodě, nebude to v krajním (a,b)

spojitá, podpokladatelné nulty

$\lim_{x\to\xi} f(x) = f(\xi)$ derivace.

tedy potom platí vztah

$f'(\xi) = 0$.

geometrický význam Rolleho věty

existuje aspoň 1 bod se tečnou (a,b), že dotyčnice v tom bodě je rovnoběžná s osou $\to x$

Věta Lagrangeova věta (věta o přírůstku funkce)

Nechť f má vlastnosti

1. f spojitá na $\langle a,b\rangle$
2. má derivaci na (a,b)

Potom existuje aspoň 1 bod $\xi \in (a,b)$ tak, že

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi)$

$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a)$

přírůstek funkce

geometrický význam:

$f'(\xi)$ směrnice dotyčnice

$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$[a, f(a)], [b, f(b)]$

existuje bod $\xi \in (a,b)$, že dotyčnice v bodě ξ je rovnoběžná s přímkou spojující body $[a, f(a)]$, $[b, f(b)]$

DŮKAZ zavedu pomocnou funkci

$L(x) = f(x) - f(a) - \frac{b-a}{b-a}(f(b) - f(a))$

ukážeme, že

pro $L(x)$ ze věty Rolleho

1) je spojitá na $\langle a,b\rangle$ ✓
2) má derivaci na (a,b) ✓
3) platí

$L(a) = f(a) - f(a) - \frac{a-a}{b-a}(f(b) - f(a)) = 0$

$L(b) = f(b) - f(a) - \frac{b-b}{b-a}(f(b) - f(a)) = 0$

NO $L(a) = L(b)$!

tedy pro $L(x)$ ze věty Rolleho existuje

$\exists \xi \in (a,b)$ $L'(\xi) = 0$

$L'(x) = f'(x) - \frac{1}{b-a}(f(b) - f(a))$

$L'(\xi) = f'(\xi) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0$

$\exists \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

Taylorův polynóm ⇐ dává výrazem derivace funkce

nejprve funkcím $f(x)$ diferencovat na okolí bodu x_0

nech $f(x)$ má $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, ... $f^{(n)}(x_0)$

$T(x)$ (nech má „NEJLEPŠÍ TRENDS") $\to T_n(x)$, $f(x)$ ↓ chceme přesný podobný → 1) Konstanta, 2) Konstantní, 3) Konstantní

1) nejdříve funkce $f(x)$ nahradím konstantou (na okolí bodu x_0) $\boxed{f(x_0)}$ nahradím $\boxed{T_0(x)}$ Konstanta

2) funkce $f(x)$ nahradím lineární funkcí $T_1(x) = ax + b$

nech $T_1(x_0) = f(x_0)$ ✓

a navíc nech $T'_1(x_0) = f'(x_0)$

kde nech přímka má směrnici = směrnice dotyčnice bu

$\boxed{\text{směrnice } f'(x_0)}$

kde hledám funkci v tvaru (polynom) $T_n(x) = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots + a_n(x-x_0)^n$

kde aby

$T_n(x_0) = f(x_0)$

$T'_n(x_0) = f'(x_0)$

$T''_n(x_0) = f''(x_0)$

chceme

$T^{(n)}_n(x_0) = f^{(n)}(x_0)$

polynom

$T_n(x) = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$

$T''_n(x) = 2a_2 + 3.2\, a_3(x-x_0) + \dots$

derivace v bodě x_0:

$T'_n(x_0) = a_1 = f'(x_0)$

$T''_n(x_0) = 2a_2 = f''(x_0)$

$T'''_n(x_0) = 3.2\, a_3 = f'''(x_0)$

kde $T_n(x_0) = a_0 = f(x_0)$

$a_1 = f'(x_0)$

$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$

$a_3 = \frac{f'''(x_0)}{3.2}$

kde $T_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$

$f(x) \approx T_n(x)$

Taylorův polynóm funkce $f(x)$ v bodě x_0 (pomocí se na nahrazení složitých funkcí polynómem)

příklad: Dána je funkce $f(x) = e^x$

hledejme $T_n(x)$ pro $x_0 = 0$

polynom	
$f(x) = e^x$	$f(x_0 = 0) = 1$
$f'(x) = e^x$	$f'(x_0) = 1$
$f^{(n)}(x) = e^x$	$f^{(n)}(x_0) = 1$

$T_n(x) = 1 + 1.x + \frac{1}{2!} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \frac{1}{4!} x^4 + \dots + \frac{1}{n!} x^n$

$e^x \approx \underbrace{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{x^n}{n!}}_{\text{Taylorův polynom}}$