

Matematika 1 – 7.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Derivácia funkcie

Označenie derivácie funkcie v bode x_0 : $f'(x_0)$

Pravidlá pre výpočet derivácie funkcie:

$$[cf(x)]' = cf'(x) \quad c \in \mathbb{R}$$

$$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$$

$$[f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$$

$$[f(g(x))]' = f'(g(x))g'(x).$$

$$[f(x)^{g(x)}]' = [e^{g(x) \cdot \ln f(x)}]'$$

Napr. :

$$(3x)'$$

$$(2x^2 + 5 - \ln x)'$$

$$(x \cdot \ln x)'$$

$$\left(\frac{3x}{\sin x}\right)'$$

$$(\ln \sin 2x)'$$

$$[(\sin x)^x = e^{x \ln \sin x}]'$$

Derivácie elementárnych funkcií:

- $[c]' = 0$
- $[x^\alpha]' = \alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R}$
- $[\sin x]' = \cos x$
- $[\cos x]' = -\sin x$
- $[\operatorname{tg} x]' = \frac{1}{\cos^2 x}$
- $[\operatorname{cotg} x]' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
- $[\arcsin x]' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\arccos x]' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $[\operatorname{arctg} x]' = \frac{1}{1+x^2}$
- $[\operatorname{arccotg} x]' = -\frac{1}{1+x^2}$
- $[e^x]' = e^x$
- $[a^x]' = a^x \ln a$
- $[\ln x]' = \frac{1}{x}$
- $[\log_a x]' = \frac{1}{x \ln a}$

Pr. 1: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = x \cdot \arccos(x^2 + 5x) + \sqrt{2 - x^2 + 3^x}$$

Pr. 2: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \sin(1 + x^2)$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g(x)'$$

$$f'(x) = \sin'(1 + x^2) \cdot [(1 + x^2)]'$$

$$f'(x) = \cos(1 + x^2) \cdot (0 + 2x)$$

$$f'(x) = 2x \cos(1 + x^2)$$

Pr. 3: Vypočítajte deriváciu funkcie

$$f(x) = \sin \sqrt{1 + x^2}$$

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g(x)'$$

$$f'(x) = \sin'(\sqrt{1 + x^2}) \cdot \left[(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} \right]' (1 + x^2)'$$

$$f'(x) = \cos \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{1}{2} (1 + x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x$$

$$f'(x) = \cos \sqrt{1 + x^2} \cdot \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

Pr. 4 – str. 26 / 26:

$$f(x) = x^{e^x}$$

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \cdot \ln f(x)})'$$

Dú -25, 26 / 25 - 35

Pr. 5 – str. 26 / 27:

$$f(x) = x^{\sin x}$$

$$(f(x)^{g(x)})' = (e^{g(x) \cdot \ln f(x)})'$$

$$f(x) = x^{\sin x}$$

$$g(x) = \sin x$$

$$f(x) = e^{\sin x \cdot \ln x}$$

$$f(x) = x$$

$$f'(x) = (e^{\sin x \cdot \ln x})' \cdot (\sin x \cdot \ln x)'$$

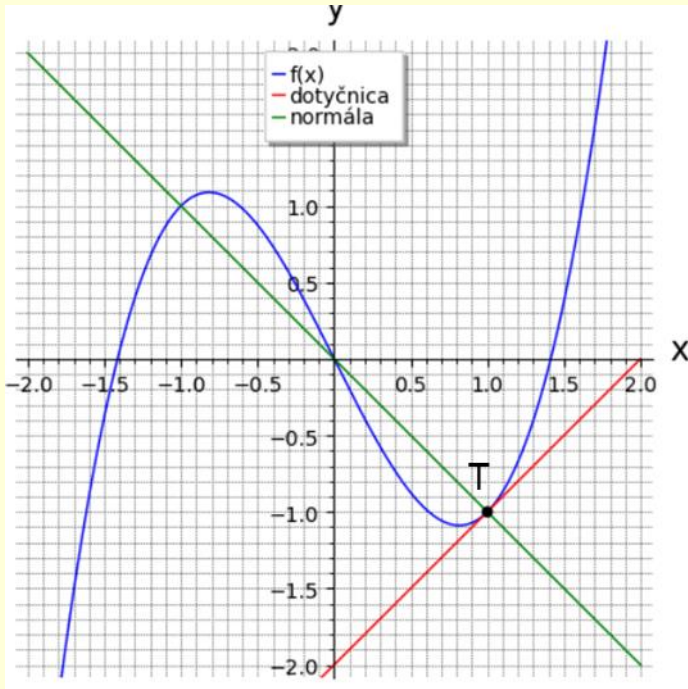
$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot ((\sin x)' \cdot \ln x + \sin x \cdot (\ln x)')$$

$$f'(x) = e^{\sin x \cdot \ln x} \cdot (\cos x \cdot \ln x + \sin x \cdot \frac{1}{x})$$

$$f'(x) = x^{\sin x} \left(\cos x \cdot \ln x + \frac{\sin x}{x} \right)$$

Dú – str: 25, 26 / 1 - 35

Geometrický význam derivácie funkcie



dotykový bod $T [x_0, y_0]$ ku grafu funkcie $f(x)$

Smernica dotyčnice = derivácia $f'(x_0)$ v dotykovom bode T ku grafu $f(x)$

$$k_t = f'(x_0)$$

Rovnica dotyčnice v dotykovom bode T ku grafu $f(x)$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0)$$

Smernica normály $k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t}$

Rovnica normály v dotykovom bode T ku grafu $f(x)$ kolmo na dotyčnicu

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0)$$

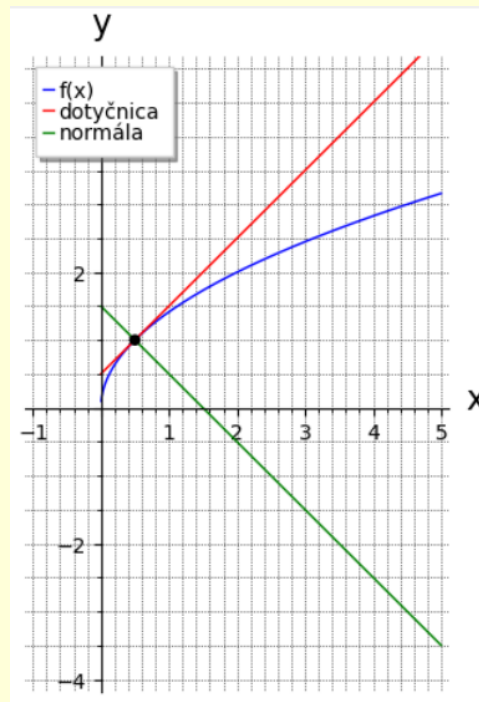
Pr. 1 – 29 / 5

nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v dotykovom bode

$$f(x) = \sqrt{2x}$$

$$T\left[\frac{1}{2}, ?\right]$$

1. Dopočítať y – ovú súradnicu dotykového bodu, pomocou x – ovej súradnice.
2. Určiť prvú deriváciu funkcie $f'(x)$ a dopočítať smernicu dotyčnice k_t .
3. Vypočítať smernicu normály k_n .
4. Vyjadriť rovnicu dotyčnice a normály.



$$f(x) = x^3 + 9x + 2$$

$$T[0, ?]$$

$$t: 9x - y + 2 = 0$$

$$n: x + 9y - 18 = 0$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = 0^3 + 9 \cdot 0 + 2 = 2$$

$$T[0, 2]$$

$$f'(x) = 3x^2 + 9 \quad k_t = f'(x_0) = 3 \cdot 0^2 + 9 = 9$$

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{9}$$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0) \quad y - 2 = 9 (x - 0)$$

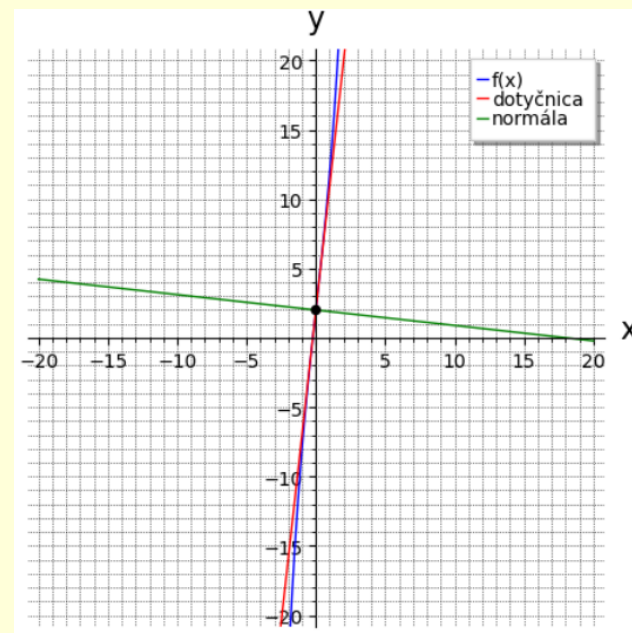
$$y - 2 = 9x$$

$$\underline{t: 0 = 9x - y + 2}$$

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0) \quad y - 2 = -\frac{1}{9} (x - 0)$$

$$-9y + 18 = x$$

$$\underline{n: 0 = x + 9y - 18}$$

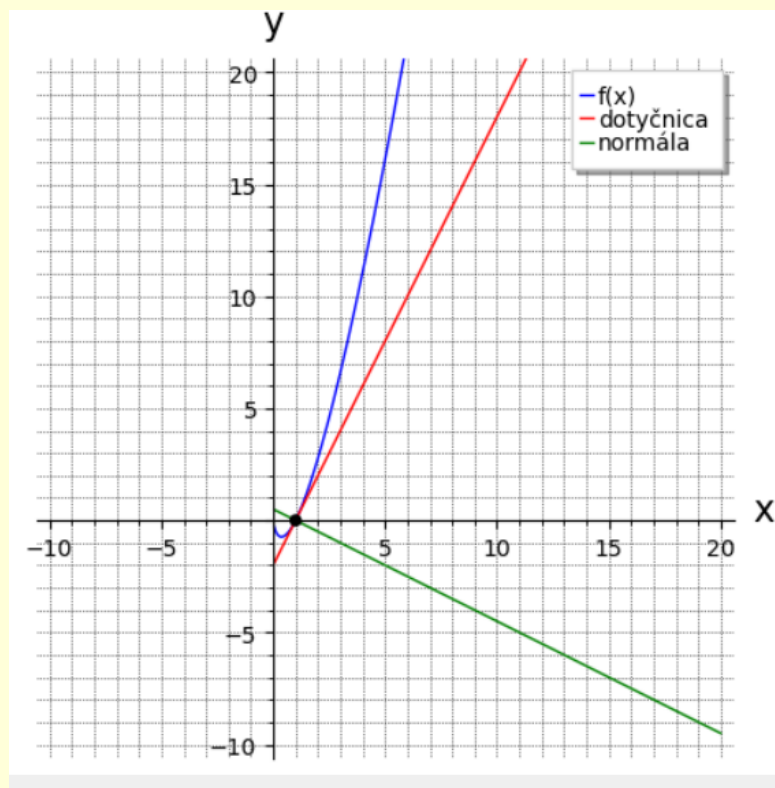


Pr. 3 – 29 / 7

nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v dotykovom bode

$$f(x) = 2x \ln x$$

$$T[1, ?]$$



nájdite rovnicu dotyčnice a normály ku grafu funkcie $f(x)$ v dotykovom bode

$$f(x) = \frac{e^x}{2} + 1$$

$$T[0, ?]$$

$$t: x - 2y + 3 = 0$$

$$n: 4x + 2y - 3 = 0$$

$$x_0 = 0, \quad y_0 = f(x_0) = \frac{e^0}{2} + 1 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}$$

$$T[0, \frac{3}{2}] \quad e^0 = 1$$

$$f'(x) = \frac{e^x}{2} \quad k_t = f'(x_0) = \frac{e^0}{2} = \frac{1}{2}$$

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{k_t} = -2$$

$$t: y - y_0 = k_t (x - x_0) \quad y - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} (x - 0)$$

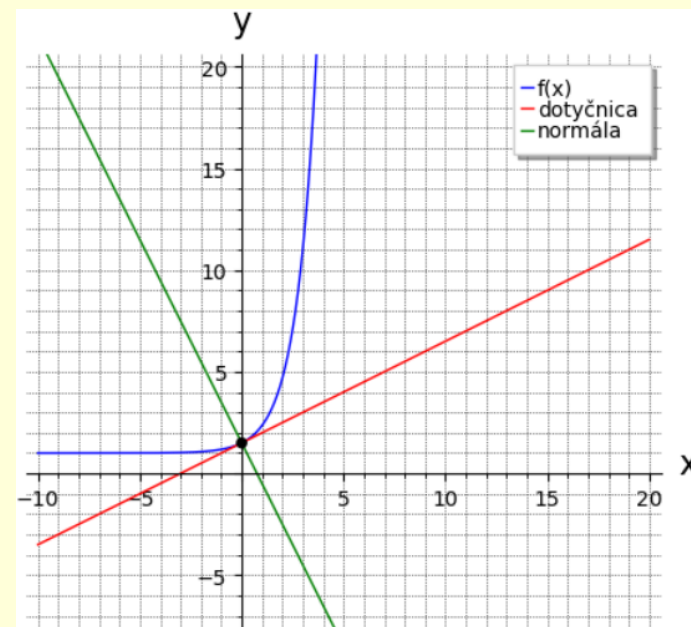
$$2y - 3 = x$$

$$t: 0 = x - 2y + 3$$

$$n: y - y_0 = k_n (x - x_0) \quad y - \frac{3}{2} = -2 (x - 0)$$

$$-2y + 3 = 4x$$

$$n: 0 = 4x + 2y - 3$$



Dú – str. 29 / 4, 6, 8, 10

Správnosť výpočtov z dú si môžete overiť pomocou SageMath, návod nájdete na predposlednej snímke.

L' Hospitalovo pravidlo

Pre výpočet limít, kde sa použije derivácia. Platí za určitých podmienok

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

1. limity s neurčitost'ou $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ - priamo použijeme toto pravidlo

Pr. 1 – 34 / 8:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x^2}$$

Pr. 2 – 34 / 5

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{x}$$

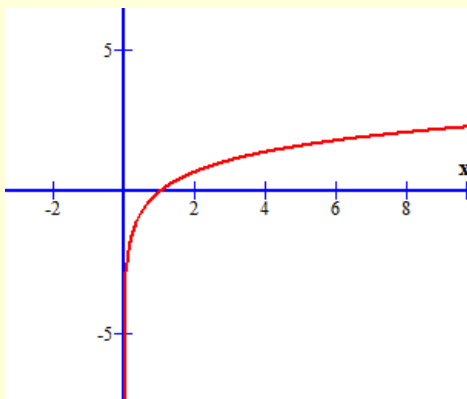
$\ln 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x - 3^x}{x} \stackrel{\frac{0}{0} \text{ L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(6^x - 3^x)'}{x'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6^x \ln 6 - 3^x \ln 3}{1} = 6^0 \ln 6 - 3^0 \ln 3 = \ln \frac{6}{3} = \ln 2$$

$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Pr. 3 – 35 / 13

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

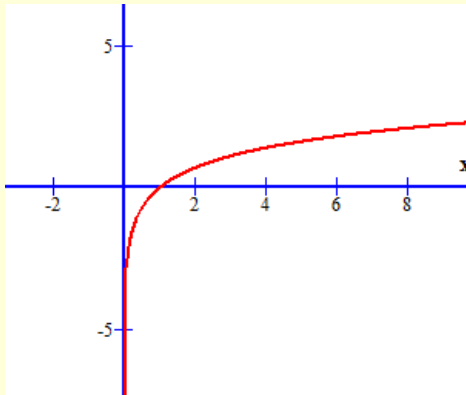


Dú – str. 34,35 / 3, 4, 6, 7, 9, 11, 12

2. limity s neurčitost'ou $\infty - \infty$, upravíme na spoločného menovateľa, dostaneme neurčitost' $\frac{\infty}{\infty}$ alebo $\frac{0}{0}$ a potom použijeme toto pravidlo

Pr. 4 – 35 / 16

$$\lim_{x \rightarrow 1+} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$



Pr. 5 – 35 / 19

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{2x} - \frac{1}{\sin x} \right) \stackrel{\infty - \infty}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - 2x}{2x \cdot \sin x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \stackrel{L'H}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[\sin x - 2x]'}{[2x \cdot \sin x]'} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\cos x - 2}{2 \cdot \sin x + 2x \cdot \cos x} = \frac{\cos 0^+ - 2}{2 \cdot \sin 0^+ + 2 \cdot 0^+ \cdot \cos 0^+} = \frac{1 - 2}{0^+ + 0^+} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

Dú – str. 34,35 / 17,18, 20

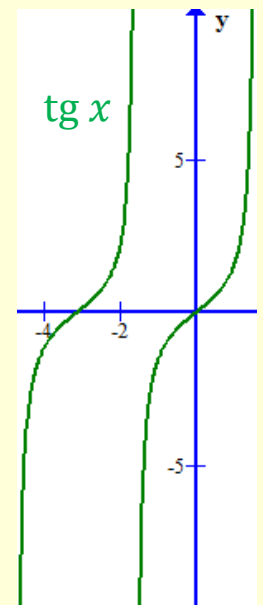
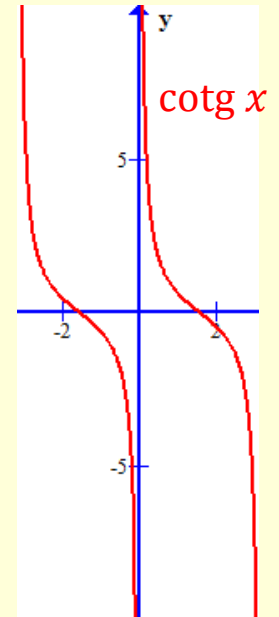
3. limity s neurčitost'ou $0 \cdot \infty$, upravíme limitu na tvar ,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{\frac{1}{g(x)}} \quad \text{alebo} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{\frac{1}{f(x)}}$$

dostaneme neurčitost' $\frac{\infty}{\infty}$ alebo $\frac{0}{0}$ a potom použijeme toto pravidlo

Pr. 6:

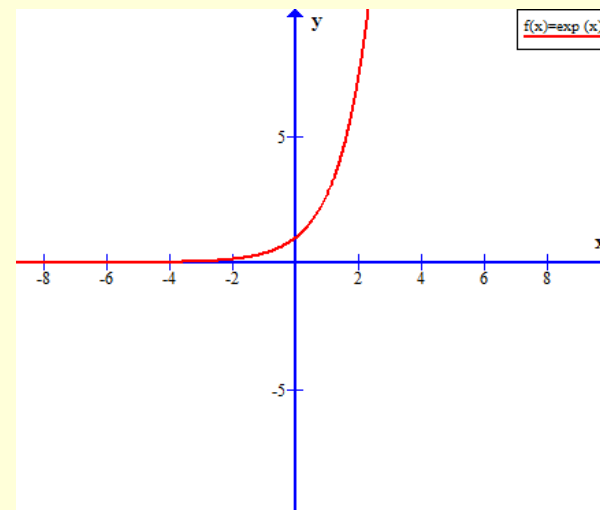
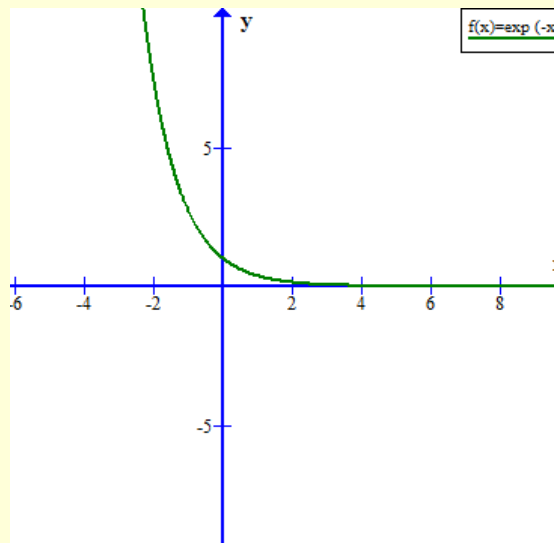
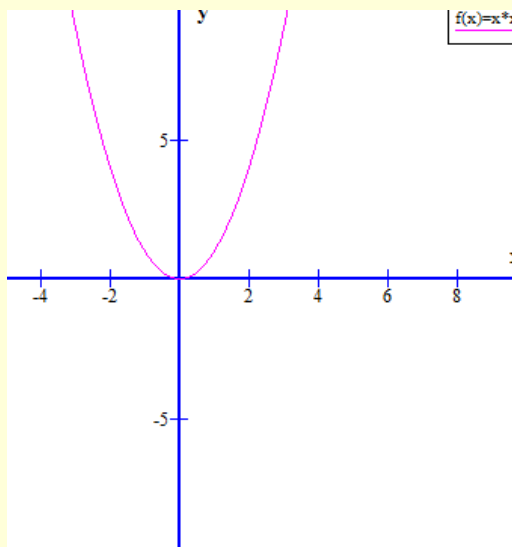
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - \cos x) \cdot \cotg x$$



$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x}$$

0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{-x} &= \overset{\infty \cdot 0}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{-x}}} = \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2)'}{(e^x)'}}} = \overset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x}}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{e^x} = \frac{2}{\infty} = 0 \end{aligned}$$



Na stránke <https://feimat.azurewebsites.net> kde sa prihláste ako **Host'**.

Otvorte si časť **Geometrický význam derivácie**— čítať viac.

1. → Geometrický význam derivácie

2. ↓ Evaluate

3. SageMath kód

4. f(x) = $e^x/2 + 1$

5. x₀ (dotkový bod) 0

Derivácia $f'(x_0)$ funkcie je smernica k_2 dotyčnice ku grafu funkcie $y = f(x)$ v dotykovom bode $T[x_0, y_0]$, čiže

$$f'(x_0) = k_2$$

a smernica normály je

$$k_n = -\frac{1}{f'(x_0)}$$

Rovnica dotyčnice je

$$t: y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Rovnica normály, ak $f'(x_0) \neq 0$, je

$$n: y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Návod na použitie Sage :

- nakopírujte kód z ľavej lišty (Geometrický význam derivácie) a vložte do okna SageMath kód
- pre zobrazenie riešenia stlačte Evaluate (zobrazí sa riešenie pre 1. úlohu)
- pre **výpočet a zobrazenie grafov z dŭ** vložte do bunky f(x) rovnicu upravenú pre Sage a do bunky x₀ vložte prvú súradnicu dotykového bodu, stlačte Enter na klávesnici

Pre zmazanie pôvodného kódu v políčku SageMath kód označte pôvodný text (kliknite na ľubovoľné miesto v kóde) a stlačte **CTRL + A** a potom **DELETE**. Potom vložte nový nakopírovaný kód a postupujte podľa návodu (body 1–3).

Poznámka: ak sa Vám nezobrazí celý graf danej funkcie zmeňte oblasť zobrazenia súradníc pomocou xmin, xmax, ymin, ymax

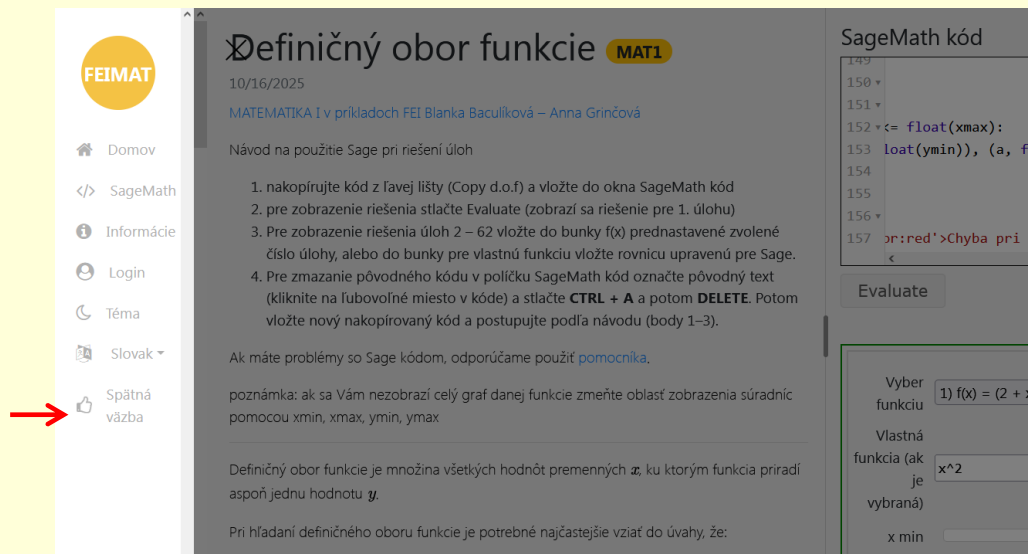
Zápis funkcií v Sage kóde: je uvedený v dolnej časti stránky

Zápis funkcií v Sage kóde:

<u>lineárna funkcia:</u>	$a*x+b$
<u>kvadratická funkcia:</u>	$a*x^2+b*x+c$
<u>mocninová funkcia:</u>	$a*x^n$
<u>gonimetrická funkcia:</u>	$\sin(x)$, $\cos(x)$
<u>lomená funkcia:</u>	$(a*x+b)/(c*x+d)$
<u>logaritmická funkcia:</u>	$\log(x, \text{základ})$
<u>exponenciálna funkcia:</u>	a^x
<u>funkcia arcsin , arccos:</u>	$\text{asin}(x)$, $\text{acos}(x)$

napr: $5*x-8$
napr. $2*x^2-3*x+5$
napr. $0.5*x^3$
napr. $\sin(x*x)$
napr. $(2*x)/(5*x-1)$
napr. $\log(x, 0.5)$
napr. 3^x
napr. $5*x-8$

Ohodnot'ite vytvorenú stránku: otvorte menu a choďte do časti **Spätná väzba**



Informácie k 1. zápočtovej písomke

Píše sa na cvičeniach. Písomka pozostáva z **5 príkladov** (každý za 6 bodov, spolu **30 bodov**) + **teória** (otázky s výberom odpovede a doplnením, spolu **za 15 bodov**)

teória z prednášok - ppt na <https://kmti.fei.tuke.sk/predmet/matematika-i> **Prílohy:**
prednáška č. 1 – č. 6

Príklady: z cvičení a dú, ppt z cvičení

<https://kmti.fei.tuke.sk/pedagog/rndr-zuzana-gibova-phd> **Prílohy:** cvičenie 1 - 7

Okruhy:

1. Definičný obor
2. Derivácia
3. Limita, L'Hopitalovo pravidlo
4. ASS, ABS
5. Rovnica dotyčnice

čas: 70 minút

doniesť ISIC, písacie potreby a dvojhárok s vytlačenou hlavičkou zo stránky

<https://kmti.fei.tuke.sk/predmet/matematika-i> v záložke **Vzory a predlohy**,

kalkulačka, mobil a iné SMART zariadenia sú zakázané