

# Matematika 1 – 8.cvičenie

**RNDr. Z. Gibová, PhD.**

# Monotónnosť funkcie a extrémny funkcie

**Monotónnosť funkcie** – vypočítame prvú deriváciu funkcie na základe nej určíme monotónnosť a extrémny:

na intervaloch, kde  $f(x)' > 0$  je funkcia  $f(x)$  rastúca ↗

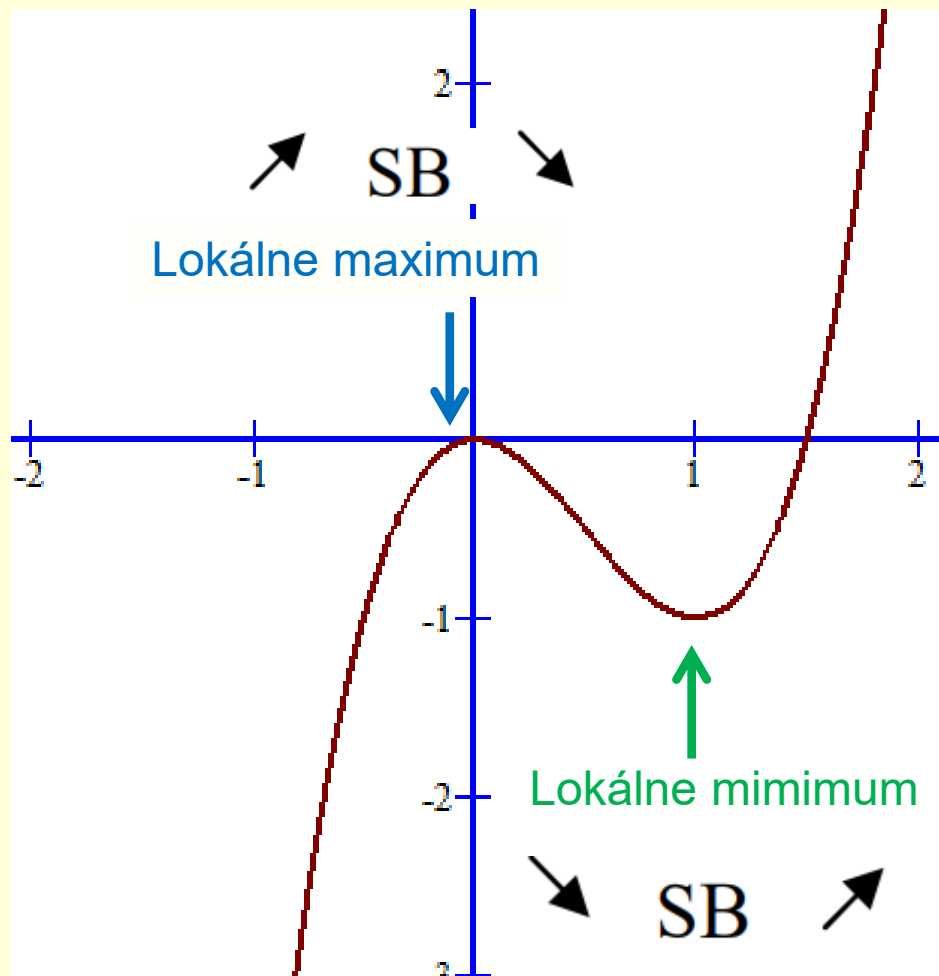
na intervaloch, kde  $f(x)' < 0$  je funkcia  $f(x)$  klesajúca ↘

*Monotónnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých  $f(x)' = 0$  alebo v bodoch, v ktorých  $f(x)'$  neexistuje.*

**Stacionárne body (SB)** – body, v ktorých je  $f(x)' = 0$

**Lokálne maximum** – ak na intervale vľavo od SB funkcia rastie a vpravo klesá  
↗ **SB** ↘

**Lokálne minimum** – ak na intervale vľavo od SB funkcia klesá a vpravo rastie  
↘ **SB** ↗



## Postup pri určení intervalov monotónnosti:

1. určíme definičný obor
2. vypočítame prvú deriváciu funkcie
3. prvú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je  $f(x)' = 0$  – stacionárne body
4. určíme bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje
5. stacionárne body a bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme monotónnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme lokálne extrémny funkcie

# Konvexnosť, konkavnosť funkcie a inflexné body

**Konvexnosť a konkavnosť funkcie** – vypočítame druhú deriváciu funkcie

na intervaloch, kde  $f(x)'' > 0$  je funkcia konvexná – U

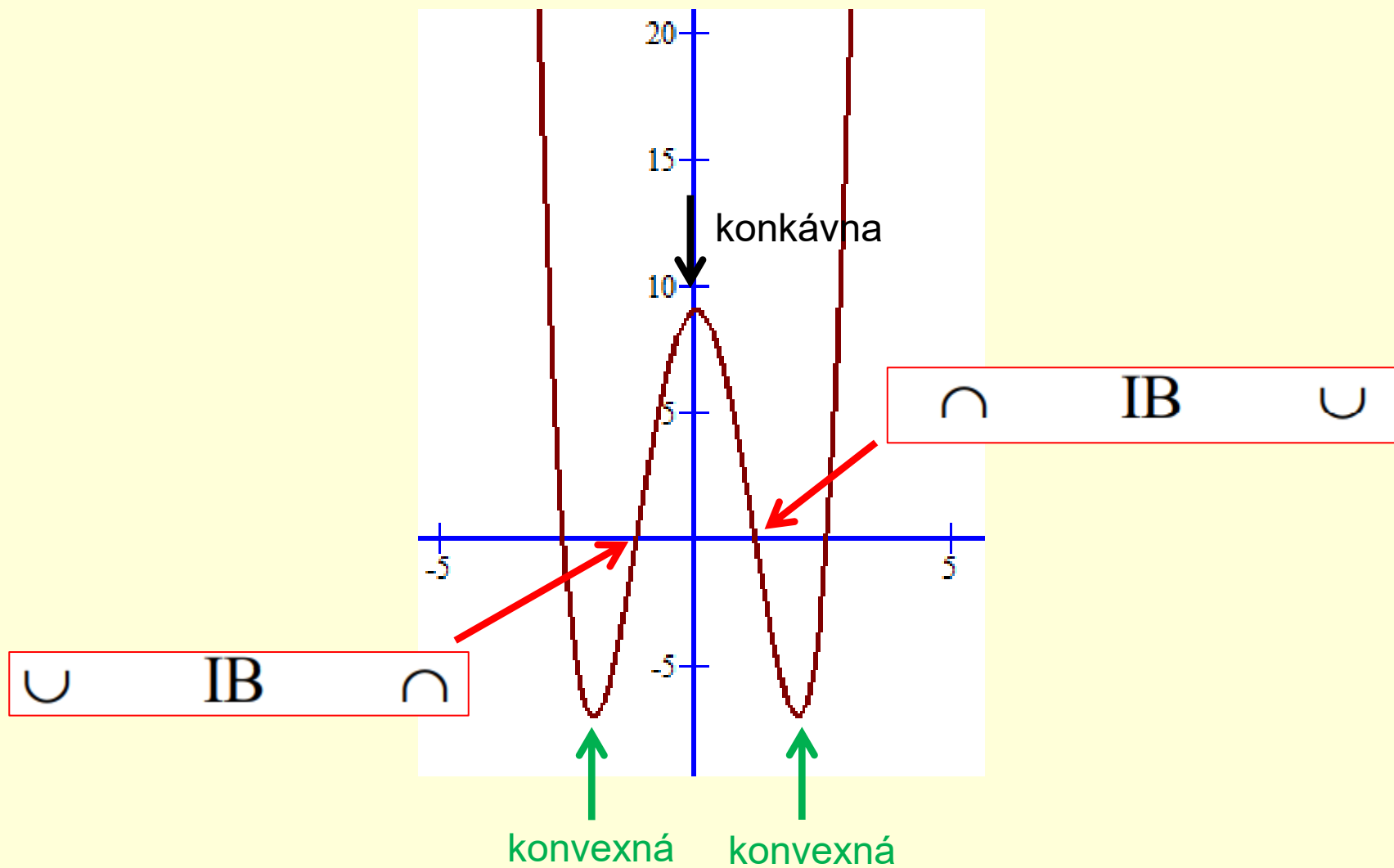
na intervaloch, kde  $f(x)'' < 0$  je funkcia konkávna – ∩

*Konvexnosť a konkavnosť sa môže meniť v bodoch, v ktorých  $f(x)'' = 0$  alebo v bodoch, v ktorých druhá derivácia funkcie  $f(x)''$  neexistuje.*

**Inflexné body (IB)** – body, v ktorých je  $f(x)'' = 0$  a sa v nich mení konvexnosť a konkavnosť

U      IB      ∩

∩      IB      U



## **Postup pri určení intervalov pre konvexnosť a konkávnosť:**

1. určíme definičný obor
2. vypočítame druhú deriváciu funkcie
3. druhú deriváciu funkcie dáme rovnú nule, určíme body v ktorých je nulová
4. určíme bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje
5. body, v ktorých je druhá derivácia nulová a bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje, rozdelia definičný obor na intervaly
6. zistíme znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť funkcie na intervaloch
7. nájdeme infexné body funkcie

**Pr. 1 – 47 / 4:** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = 16x(x - 1)^3$$

**Pr. 2 – 47 / 2:** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

### Určenie monotónnosti - sami

1. určiť definičný obor

$$D(f) = \mathbb{R}$$

2. vypočítať prvú deriváciu funkcie

$$y' = 3x^2 + 6x$$

$$y' = 3x(x + 2)$$

3. určiť  $y' = 0$  a stacionárne body (SB)

$$3x(x + 2) = 0 \quad \rightarrow \quad 3x = 0 \quad \vee \quad (x + 2) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = -2$$

**SB:  $-2, 0$**

4. určiť bod, v ktorom prvá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. pomocou stacionárnych bodov a bodov, v ktorých prvá derivácia neexistuje, rozdeliť definičný obor na intervaly

|      |                                                                                   |            |                                                                                   |            |                                                                                     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $(-\infty, -2)$                                                                   | $-2$       | $(-2, 0)$                                                                         | $0$        | $(0, \infty)$                                                                       |
| $y'$ | +                                                                                 | SB         | -                                                                                 | SB         | +                                                                                   |
|      |  | lok<br>max |  | lok<br>min |  |

6. zistiť znamienko prvej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určiť monotónosť funkcie na intervaloch

$y' = 3x(x + 2)$ : pre  $x = -3$  znamienko +, pre  $x = -1$ , znamienko -, pre  $x = 1$ , +

**funkcia rastie na intervale  $(-\infty, -2)$  a  $(0, \infty)$  a klesá na  $(-2, 0)$**

7. nájsť lokálne extrémny funkcie

lokálne maximum je v bode  $-2$

lokálne minimum je v bode  $0$

## Určenie konkávnosti a konvexnosti

1. určiť definičný obor  $D(f) = \mathbb{R}$

2. vypočítať druhú deriváciu funkcie

$$y'' = (3x^2 + 6x)' = 6x + 6$$

3. určiť  $y'' = 0$   $y'' = 6x + 6 = 0 \rightarrow x = -1$

4. určiť bod, v ktorom druhá derivácia funkcie neexistuje - taký bod nemáme

5. rozdeliť definičný obor na intervaly pomocou bodov, v ktorých je druhá derivácia nulová alebo neexistuje

|       |                 |           |                |
|-------|-----------------|-----------|----------------|
|       | $(-\infty, -1)$ | <b>-1</b> | $(-1, \infty)$ |
| $y''$ | -               |           | +              |
|       | $\cap$          | <b>IB</b> | $\cup$         |

6. zistiť znamienko druhej derivácie funkcie na jednotlivých intervaloch a určíme konvexnosť a konkávnosť

funkcia je konvexná na  $(-1, \infty)$  a konkavná na intervale  $(-\infty, -1)$

7. Určiť inflexné body funkcie **inflexný bod má funkcia v -1**

**Pr. 3 – 47 / 11** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = x - \frac{1}{x}$$

$$x \neq 0, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y' = 1 + \frac{1}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^2 + 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 + 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$x^2 = -1$  nikdy nenastane, **SB nemáme**  $\wedge x \neq 0$ , v 0 prvá derivácia neexistuje,  
bod nespojitosti : 0

|      |                                                                                     |    |                                                                                     |
|------|-------------------------------------------------------------------------------------|----|-------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $(-\infty, 0)$                                                                      | 0  | $(1, \infty)$                                                                       |
| $y'$ | +                                                                                   |    | +                                                                                   |
|      |  | BN |  |

$$y' = \frac{x^2+1}{x^2} \text{ pre všetky } x \text{ stále } +$$

funkcia rastie na celom  $D(f)$

lokálne extrémny funkcia nemá

## Určenie konkávnosti a konvexnosti - sami

$$y'' = \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)' = 0 - \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = -\frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 \neq 0$$

$-\frac{2}{x^3} = 0$  nikdy nenastane, **nemáme taký bod**  $\wedge x \neq 0$ , v 0 druhá derivácia neexistuje,  
bod nespojitosti : 0

|       |                |    |               |
|-------|----------------|----|---------------|
|       | $(-\infty, 0)$ | 0  | $(0, \infty)$ |
| $y''$ | +              |    | -             |
|       | ∪              | BN | ∩             |

funkcia je konkávna na  $(0, \infty)$  a konvexná na intervale  $(-\infty, 0)$

**inflexný bod neexistuje, lebo  $y'' \neq 0$**

**Pr. 4 – 47 / 7** Vyšetrite monotónnosť funkcie, konvexnosť a konkávnosť.

$$y = \frac{x^2 + 1}{x} \quad x \neq 0, D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$y' = \frac{2x \cdot x - (x^2 + 1) \cdot 1}{x^2} = \frac{x^2 - 1}{x^2} \quad y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} = 0 \rightarrow x^2 - 1 = 0 \wedge x^2 \neq 0$$

$$[x] = \pm 1, \text{SB} : -1, 1 \quad \wedge \quad x \neq 0, \text{BN} : 0$$

|      |                                                                                   |            |                                                                                   |     |                                                                                     |            |                                                                                     |
|------|-----------------------------------------------------------------------------------|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|-------------------------------------------------------------------------------------|------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
|      | $(-\infty, -1)$                                                                   | $-1$       | $(-1, 0)$                                                                         | $0$ | $(0, 1)$                                                                            | $1$        | $(1, \infty)$                                                                       |
| $y'$ | +                                                                                 | SB         | -                                                                                 |     | -                                                                                   | SB         | +                                                                                   |
|      |  | lok<br>max |  | BN  |  | lok<br>min |  |

$$y' = \frac{x^2 - 1}{x^2} \text{ pre } x > 1 \text{ a } x < -1 \text{ je } + \quad \text{lokálne extrémy: lok. max: } -1, \text{lok. min: } 1$$

funkcia rastie na  $(-\infty, -1)$  a  $(1, \infty)$ , klesá na  $(-1, 0)$  a  $(0, 1)$

## Určenie konkávnosti a konvexnosti - sami

$$y'' = \left( \frac{x^2 - 1}{x^2} \right)' = 1 - \frac{1}{x^2} = 0 + \frac{2}{x^3}$$

$$y'' = \frac{2}{x^3} = 0 \rightarrow x^3 \neq 0$$

$\frac{2}{x^3} = 0$  nikdy nenastane, **nemáme taký bod**  $\wedge x \neq 0$ , BN : 0

|       |                |    |               |
|-------|----------------|----|---------------|
|       | $(-\infty, 0)$ | 0  | $(0, \infty)$ |
| $y''$ | -              |    | +             |
|       | $\cap$         | BN | $\cup$        |

funkcia je konkávna na  $(-\infty, 0)$  a konvexná na intervale  $(0, \infty)$

**inflexný bod neexistuje, lebo  $y'' \neq 0$**

Dú – 47/ 1, 5, 6, 8, 9,12, 13, 16