

Matematika 1 – 9.cvičenie

RNDr. Z. Gibová, PhD.

Priebeh funkcie

- 1 Definičný obor funkcie
- 2 Limity funkcie v krajných bodoch definičného oboru
- 3 Limity (jednostranné) v bodoch nespojitosti funkcie
- 4 Asymptoty grafu funkcie
- 5 Párnosť, nepárnosť funkcie
- 6 Monotónnosť funkcie
- 7 Lokálne extrémny funkcie
- 8 Intervaly konvexnosti a konkávnosti
- 9 Inflexné body funkcie
- 10 Graf funkcie

Pr. 1 - 47 / 11: Vyšetrite priebeh funkcie.

$$y = x - \frac{1}{x}$$

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

2. limity v krajných bodoch $D(f)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x - \frac{1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x - \frac{1}{x} = -\infty$$

3. bod nespojitosti $x = 0$

4. ABS $x = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x - \frac{1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x - \frac{1}{x} = \infty$$

ASS $y = x$ pre $x \rightarrow \pm\infty$

5. párnosť, nepárnosť

$$f(-x) = (-x) - \frac{1}{(-x)} = -x + \frac{1}{x} = -\left(x - \frac{1}{x}\right) = -f(x) \quad \text{je nepárna}$$

6. rastie na $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$

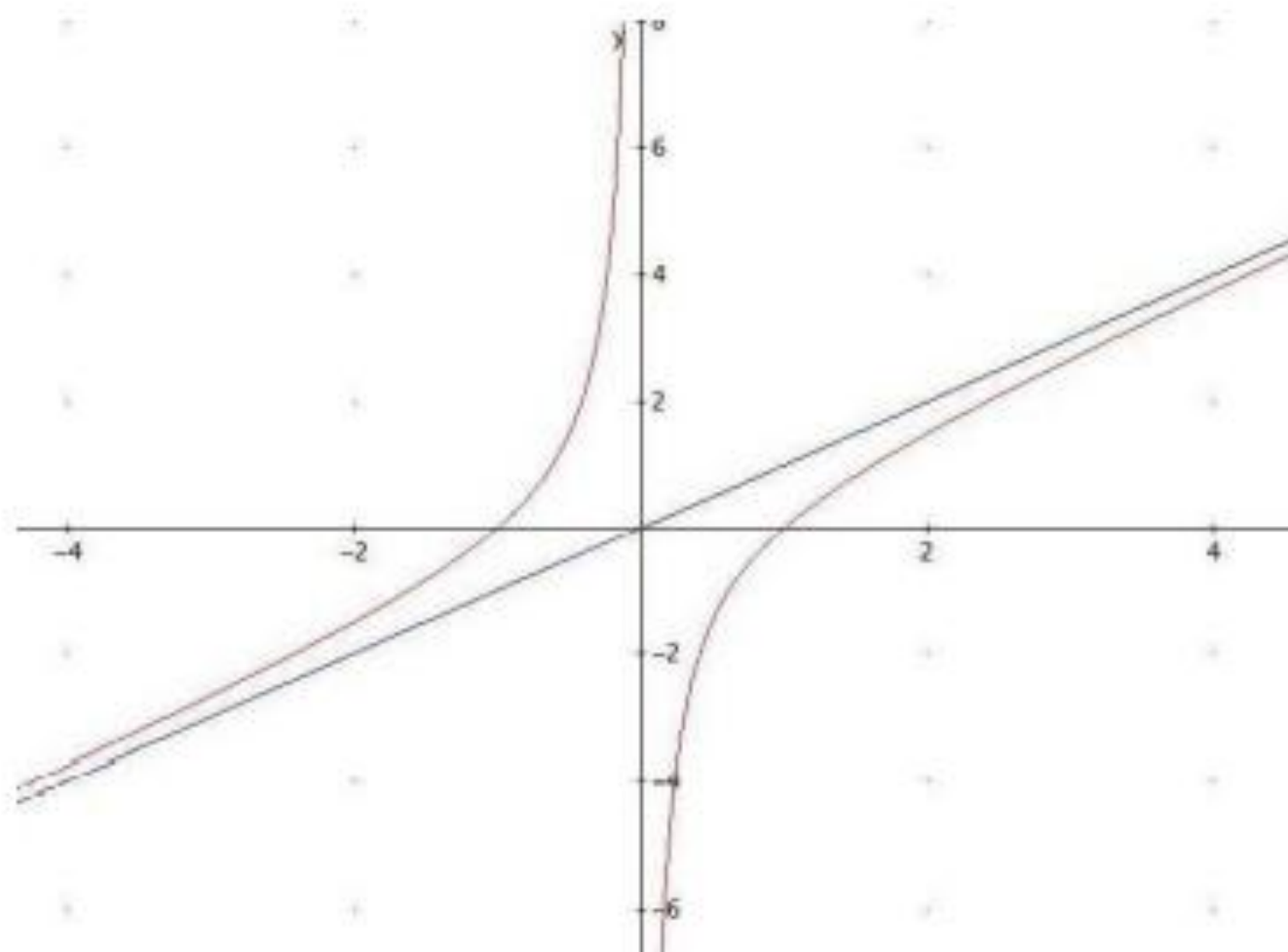
7. lokálne extrémym **nemá**

8. konvexná $\cup$ na $(-\infty, 0)$, konkávna $\cap$ na $(0, \infty)$,

9. inflexný bod **nemá**

10. priesečníky s osami: s osou y nemá, s osou x : $y = 0$, $x = 1$, $x = -1$

11. graf



Pr. 2 - 47 / 1: Vyšetrite priebeh funkcie.

$$y = x^3 + 3x^2 - 2$$

1. $D(f) = \mathbb{R}$

2. limity v krajných bodoch $D(f)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^3 + 3x^2 - 2 = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 + 3x^2 - 2 = -\infty$$

3. nemá bod nespojitosti

4. ABS nemá

ASS nemá

5. párnosť, nepárnosť

$$f(-x) = (-x)^3 + 3(-x)^2 - 2 = -x^3 + 3x^2 - 2$$

ani párna, ani nepárna

6. rastie na $(-\infty, -2)$, $(0, \infty)$, klesá $(-2, 0)$

7. lokálne maximum $x = -2$ ($y = -8 + 12 - 2 = 2$)

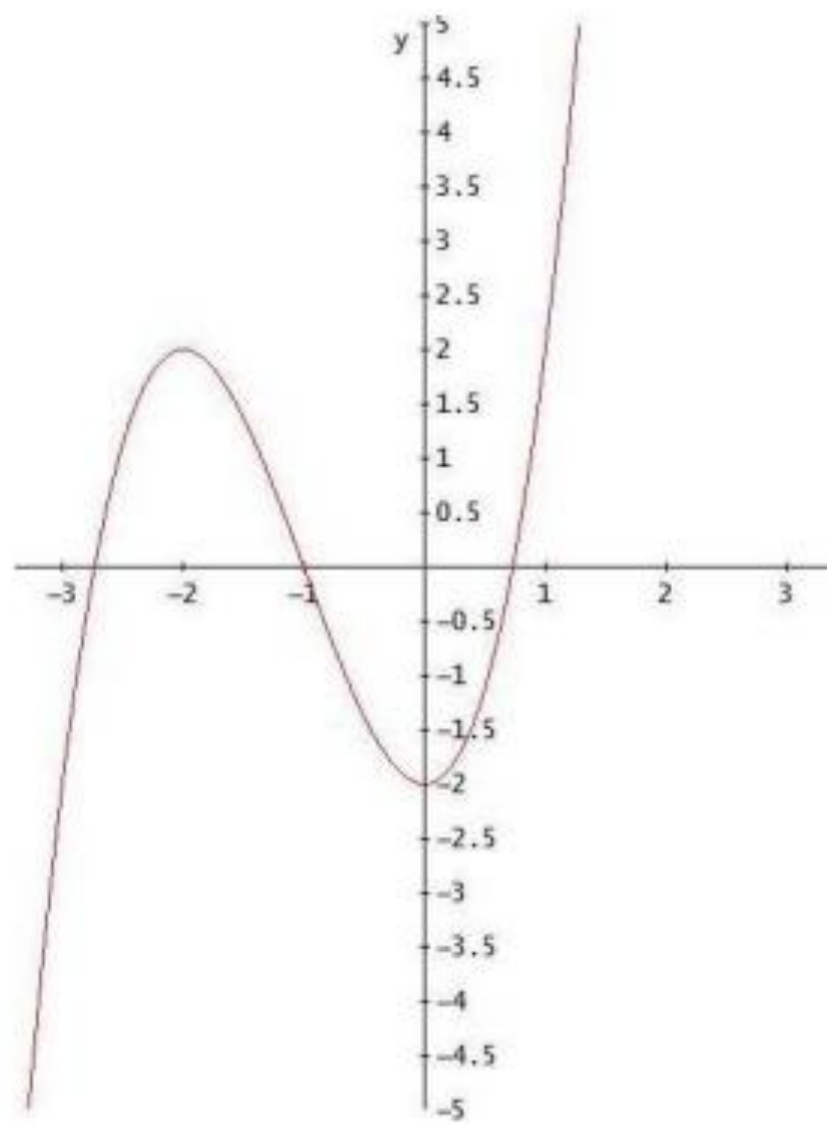
lokálne minimum $x = 0$ ($y = 0 + 0 - 2 = -2$)

8. konkávna $\cap$ na $(-\infty, -1)$, konvexná $\cup$ na $(-1, \infty)$,

9. inflexný bod $x = -1$ ($y = -1 + 3 - 2 = 0$)

10. priesečníky s osami – ak treba

11. graf



Pr.3 - 47 /10:

$$y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$$

Vyšetrite priebeh funkcie.

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{-1\}$

2. limity v krajných bodoch $D(f)$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2} = \infty$$

3. bod nespojitosti $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

4. ABS $x = -1$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{2(x+1)^2} = -\infty$$

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\frac{x^3}{2(x+1)^2}}{x} = \frac{1}{2} \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{2(x+1)^2} - \frac{1}{2}x = -1$$

ASS $y = \frac{1}{2}x - 1$ pre $x \rightarrow \pm\infty$

5. párnosť, nepárnosť

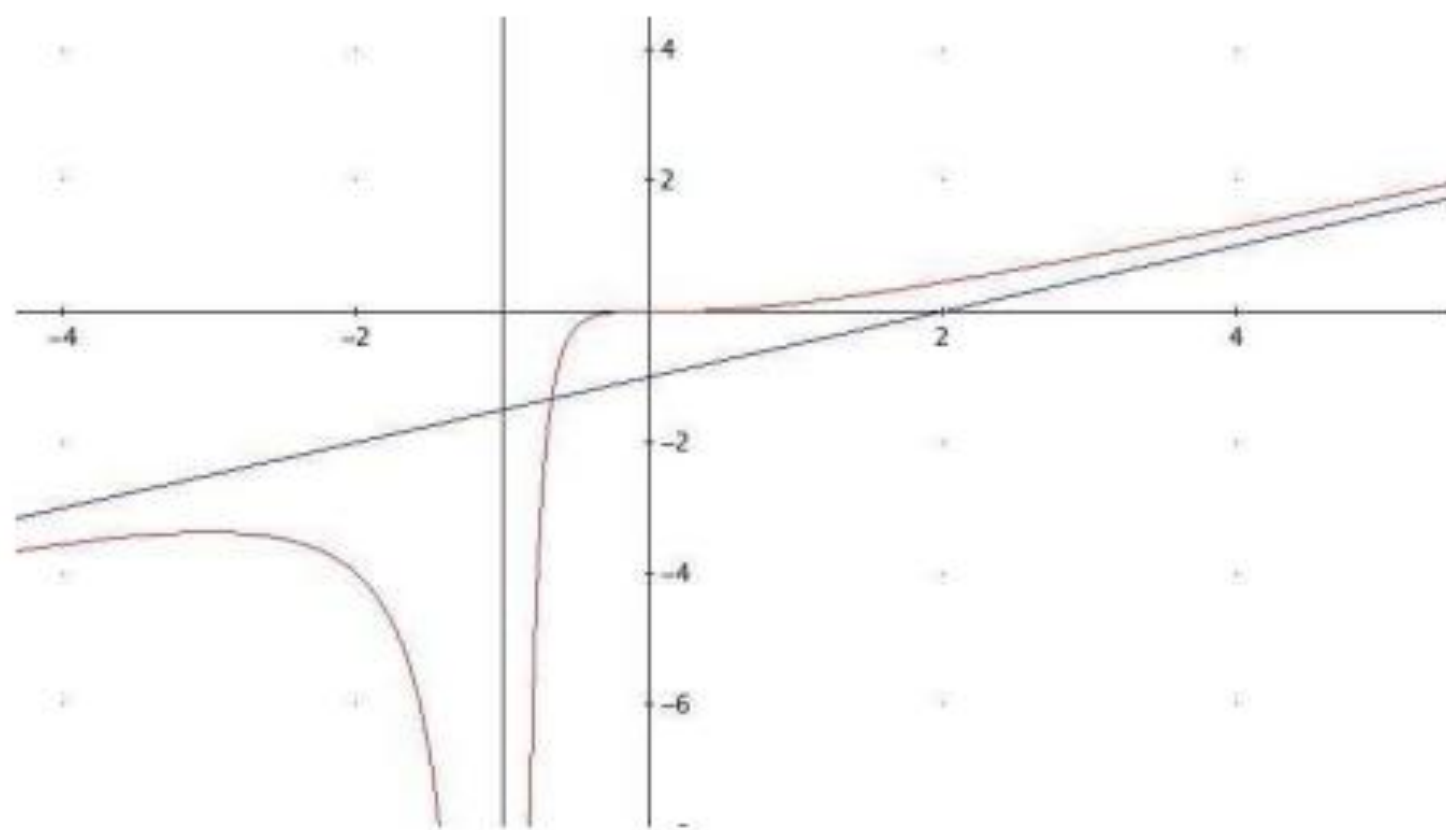
$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{2(-x+1)^2} = \frac{-x^3}{2(1-x)^2} \quad \text{ani párna, ani nepárna}$$

6. rastie na $(-\infty, -3)$, $(-1, 0)$, $(0, \infty)$, klesá $(-3, -1)$

7. lokálne maximum $x = -3$ ($y = -3,375$)

8. konvexná $\cup$ na $(0, \infty)$, konkávna $\cap$ na $(-\infty, -1)$, $(-1, 0)$

9. inflexný bod $x = 0$ ($y = 0$)



Matice, operácie s maticami

Matica typu $m \times n$ (m riadky, n stĺpce)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

n – stĺpce

m – riadky

skrátенý zápis: $A = (a_{ij})$

a_{ij} – prvok matice, kde i – i ty riadok ($i = 1, 2, 3, \dots, m$)
 j – j ty stĺpec ($j = 1, 2, 3, \dots, n$)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & -1 \\ 1 & 7 & 3 \\ 5 & -10 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

matice 5×3 , kde $a_{43} = 0$

Typy matic:

Štvorcová matica - matica typu $n \times n$ (počet riadkov sa rovná počtu stĺpcov)

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Stĺpcový vektor - matica typu $n \times 1$ (matica s jedným stĺpcom)

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Riadkový vektor - matica typu $1 \times n$ (matica s jedným riadkom)

$$A = (-2 \quad 3 \quad 5)$$

Transponovaná matica k matici A - matica, ktorú získame tak, že v matici A typu $m \times n$ zameníme navzájom riadky za stĺpce, označenie $\mathbf{A}^T$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 13 & 9 \end{pmatrix} \quad A^T = \begin{pmatrix} 4 & 13 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$$

Operácie s maticami:

Súčet (rozdiel) matic je matica **$C = A \pm B$** typu **$m \times n$**

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} \end{pmatrix}$$

Sčítavať a odpočítavať je možné len matice **rovnakého typu**.

Násobenie matice konštantou je matica **$C = k \cdot A$** typu **$m \times n$** , kde k je konštanta

$$c_{ij} = k a_{ij} \quad i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n.$$

$$k \cdot A = \begin{pmatrix} k \cdot a_{11} & k \cdot a_{12} \\ k \cdot a_{21} & k \cdot a_{22} \end{pmatrix}$$

Násobenie matíc je matica $\mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ typu $m \times n$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{ir} \cdot b_{rj} = \sum_{k=1}^r a_{ik} b_{kj}$$

kde $i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$
$$AB = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{pmatrix}$$

Násobiť môžeme len vtedy, ak je počet stĺpcov prvej matice $\mathbf{A}$ rovnaký ako počet riadkov druhej matice $\mathbf{B}$. Výsledná matica má rovnaký počet riadkov ako prvá a počet stĺpcov ako druhá.

Součin matic $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ a $\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ je

$$\mathbf{AB} = \begin{pmatrix} (1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5) & (1 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 3 \cdot 6) \\ (4 \cdot 1 + 5 \cdot 3 + 6 \cdot 5) & (4 \cdot 2 + 5 \cdot 4 + 6 \cdot 6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22 & 28 \\ 49 & 64 \end{pmatrix}$$

Pr. 1 – 59 / 1: Sú dané matice **A**, **B**. Určte a) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$, b) $\mathbf{A}^T$.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pr. 2: Sú dané matice **A**, **C**. Určte **A.C**, **C.A** .

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 4 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

A.C - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice C

C.A - nedá sa, nie je rovnaký počet stĺpcov prvej matice C ako počet riadkov druhej matice A

Pr. 3 – 59 / 3: Sú dané matice **A**, **B**. Určte **A**² + **B**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A.A - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice A

Pr. 4: Sú dané matice **A**, **B**. Určte **A.B**, **B.A** .

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

A.B - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice A ako počet riadkov druhej matice B

B.A - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice B ako počet riadkov druhej matice A

Pr. 5 – 59 / 13: Sú dané matice **E**, **F**. Určte **E.F**.

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{F} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

E.F - sa dá vypočítať, je rovnaký počet stĺpcov prvej matice E ako počet riadkov druhej matice F

$$\mathbf{E.F} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 + 12 & 0 + (-4) \\ -6 + 9 & 0 + (-3) \\ -2 + 15 & 0 + (-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 3 & -3 \\ 13 & -5 \end{pmatrix}$$

Pr. 6 – 57 / 16: Sú dané matice **A**, **B**, **C**, **D**. Určte a) **A.B – D**, b) **C^T + C**.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}, \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

a)

$$\mathbf{A.B} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+9-2 & 0+9+1 & 4-3+3 \\ 4+9-10 & 0+9+5 & 8-3+15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 3 & 14 & 20 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A.B} - \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 9 & 10 & 4 \\ 3 & 14 & 20 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9-3 & 10-4 & 4-(-1) \\ 3-2 & 14-1 & 20-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 1 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

b)

$$\mathbf{C}^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{C}^T + \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 16 \end{pmatrix}$$

Vlastnosti matíc:

Horná trojuholníková matica - štvorcová matica, ktorej prvky pod hlavnou diagonálou sú rovné nule

$$\begin{pmatrix} 3 & -7 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

Lichobežníková matica - matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 3 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Hodnosť matice A typu $m \times n$ je počet nenulových riadkov matice A upravenej na trojuholníkový resp. lichobežníkový tvar. Označenie **$h(A)$** .

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 43 & -22 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 3
 $h(A) = 3$

Ekvivalentné riadkové (stĺpcové) úpravy matice:

1. zmena poradia riadkov (stĺpcov),
2. vynásobenie riadku (stĺpca) nenulovou konštantou,
3. pripočítanie lineárnej kombinácie iných riadkov (stĺpcov) k niektorému riadku (stĺpcu).

Dve matice A a B sú ekvivalentné, ak sa jedna z matíc dá upraviť na druhú pomocou ekvivalentných úprav.

Označenie **$A \sim B$** .

Postup pri určení hodnoti matice

1. vedieme **hlavnú diagonálu v matici** (od prvého prvku v prvom riadku zľava nadol doprava),
2. použijeme **ekvivalentné úpravy**, aby sme pod hlavnou diagonálou dostali nuly (postupne v jednotlivých stĺpcoch od prvého až po posledný upravujeme tak, aby pod číslami v diagonále boli nuly),
3. keď dostaneme pod hlavnou diagonálou len nuly, **spočítame nenulové riadky** (riadky, v ktorých je aspoň jedno číslo rôzne od nuly), **hodnota matice = počtu nenulových riadkov**

Pr. 7 – 61 / 25: Vypočítajte hodnotu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2R_1 \\ -5R_1 \\ -7R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & -14 & -26 & 12 \\ 0 & -14 & -26 & 8 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -2R_2 \\ -2R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & -7 & -13 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 3

$$h(\mathbf{A}) = 3$$

Pr. 8 – 61 / 22: Vypočítajte hodnotu matice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} +2R_1 \\ +R_1 \\ +R_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 2 & 12 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} -R_2 \\ -2R_2 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

počet nenulových riadkov = 2

$$h(\mathbf{A}) = 2$$