

Matematika I. Binárne relácie

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Karteziánsky súčin

- $\{x, y\}$ nazývame **neusporiadaná dvojica** prvkov x, y .
Platí $\{x, y\} = \{y, x\}$.
- (x, y) nazývame **usporiadaná dvojica** prvkov x, y .
Tentokrát $(x, y) \neq (y, x)$
- $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ nazývame **usporiadaná n-tica** prvkov $x_1, x_2, \dots, x_n$. Platí, že $(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_n)$ práve vtedy ak $x_1 = y_1, \dots, x_n = y_n$.

Definícia

Karteziánsky súčin $A \times B$ množín A a B je množina všetkých usporiadaných dvojíc (a, b) , kde $a \in A$ a $b \in B$. Formálne zapisujeme:

$$A \times B = \{(a, b); a \in A, b \in B\}.$$

Karteziánsky súčin

- Karteziánsky súčin $A \times A$ zapisujeme aj A^2 ,
- podobne $A^3 = A \times A \times A$, atď.,
- platí: $C \times \emptyset = \emptyset \times C = \emptyset$ pre ľubovoľnú množinu C .

Definícia

Binárna relácia z množiny A do množiny B je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R}$ karteziánskeho súčinu $A \times B$. Ak $A = B$, hovoríme o binárnej relácii **na množine** A , čo je ľubovoľná podmnožina $\mathcal{R} \subseteq A^2$.

- Ak $(a, b) \in \mathcal{R}$, hovoríme, že **prvok a je v relácii $\mathcal{R}$ s prvkom b** a zapisujeme $a\mathcal{R}b$.
- Ak $(a, b) \notin \mathcal{R}$, hovoríme, že **prvok a nie je v relácii $\mathcal{R}$ s prvkom b** a zapisujeme $a\overline{\mathcal{R}}b$.

Reprezentácie binárnych relácií

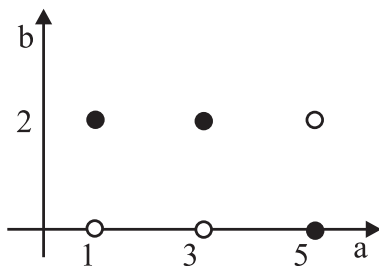
Najznámejšie reprezentácie binárnych relácií sú:

- množinová,
- grafická,
- grafová,
- maticová.

Grafická reprezentácia

Nech $A = \{1, 3, 5\}$, a $B = \{0, 2\}$. Nájdite a graficky znázornite reláciu $\mathcal{R}$, ktorá je definovaná:

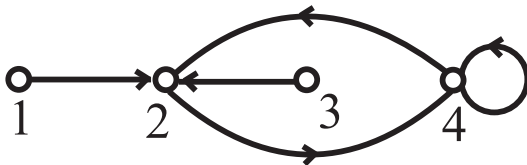
$$a\mathcal{R}b \Leftrightarrow |a - 2| = |2b - 3|, \quad a \in A, \quad b \in B.$$



Plné krúžky sú prvkami množiny $\mathcal{R}$, všetky krúžky (plné aj prázdne) sú prvkami karteziánskeho súčinu $A \times B$.

Grafová reprezentácia

Na množine $A = \{1, 2, 3, 4\}$ majme reláciu
 $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$.



Prvky množín A a B znázorňujeme krúžkami, ktoré budeme nazývať vrcholy. Usporiadanú dvojicu (a, b) znázorníme šípkou v smere od a k b , ktorú nazývame orientovaná hrana. Orientovanej hrane (a, a) hovoríme slučka.

Maticová reprezentácia

Ak $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, \dots, b_m\}$,
 $|A| = n$, $|B| = m$, môžeme $\mathcal{R}$ zapísať pomocou matice
 $M_{\mathcal{R}} = (m_{ij})$ typu (n, m) , kde

$$m_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ak } a_i \mathcal{R} a_j, \\ 0, & \text{v ostatných prípadoch.} \end{cases}$$

Na množine $A = \{1, 2, 3, 4\}$ majme reláciu
 $\mathcal{R} = \{(1, 2), (2, 4), (3, 2), (4, 2), (4, 4)\}$.

$$M_{\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Definícia

Inverzná relácia k binárnej relácii $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ je binárna relácia $\mathcal{R}^{-1} \subseteq B \times A$, pričom $\mathcal{R}^{-1} = \{(b, a); (a, b) \in \mathcal{R}\}$, pričom $a \in A$ a $b \in B$.

Platí:

- $a \mathcal{R} b \Leftrightarrow b \mathcal{R}^{-1} a$,
- $(\mathcal{R}^{-1})^{-1} = \mathcal{R}$.

Operácie s binárnymi reláciami

Definícia

Nech A, B, C sú množiny, $\mathcal{R} \subseteq A \times B$ je relácia z A do B , a $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ je relácia z B do C . **Súčinom (zložením) binárných relácií** $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ nazveme binárnu reláciu

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} \subseteq A \times C$$

takú, že pre $a \in A$ a $c \in C$ je $(a, c) \in \mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ práve vtedy, ak existuje aspoň jedno $b \in B$ také, že $(a, b) \in \mathcal{R}$ a zároveň $(b, c) \in \mathcal{S}$.

Veta (Asociatívny zákon)

Ak $\mathcal{R} \subseteq A \times B$, $\mathcal{S} \subseteq B \times C$ a $\mathcal{T} \subseteq C \times D$ sú binárne relácie, tak

$$(\mathcal{R} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{T} = \mathcal{R} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{T}).$$

Definícia

Binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine A sa nazýva

- **reflexívna:** $\forall a \in A : a \mathcal{R} a$;
- **symetrická:** $\forall a, b \in A : a \mathcal{R} b \Rightarrow b \mathcal{R} a$;
- **antisymetrická:** $\forall a, b \in A : (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} a) \Rightarrow a = b$;
- **tranzitívna:** $\forall a, b, c \in A : (a \mathcal{R} b \wedge b \mathcal{R} c) \Rightarrow a \mathcal{R} c$.

Vlastnosti binárnych relácií

1 Reflexívnosť:

- Ak máme maticovú reprezentáciu reflexívnej relácie, tak všetky prvky na hlavnej diagonále musia byť 1.
- Ak máme grafovú reprezentáciu reflexívnej relácie, tak pri každom vrchole musí byť slučka.

2 Symetrickosť:

- Ak máme maticovú reprezentáciu symetrickej relácie, tak jej matica je symetrická vzhľadom na hlavnú diagonálu.
- Ak máme grafovú reprezentáciu reflexívnej relácie, tak medzi každou dvojicou vrcholov buď hrana neexistuje, alebo sú tam obe orientované hrany.

3 Antisymetrickosť:

- Ak máme maticovú reprezentáciu antisymetrickej relácie, tak pre každé i, j také, že $i \neq j$ platí: $m_{i,j} \neq m_{j,i}$.
- Ak máme grafovú reprezentáciu reflexívnej relácie, tak medzi každou dvojicou vrcholov existuje najviac jedna orientovaná hrana.

Tranzitívnosť:

Veta

Nech M je maticová reprezentácia binárnej relácie $\mathcal{R}$ na množine A . Relácia $\mathcal{R}$ je tranzitívna práve vtedy, keď platí tvrdenie: „Ak (i, j) -tý prvok matice M^2 je nenulový, tak aj (i, j) -tý prvok matice M je nenulový.“

Definícia

Hovoríme, že relácia $\mathcal{R}$ na množine A je **relácia ekvivalencie (ekvivalencia)** na množine A , ak je reflexívna, symetrická a tranzitívna.

Nech $\mathcal{R}$ je ekvivalencia na množine A a nech $a \in A$. Symbolom $\mathcal{R}[a]$ označujeme množinu všetkých prvkov x , ktoré sú v relácii s prvkom a (t.j. $\mathcal{R}[a] = \{x; a \mathcal{R} x\}$). $\mathcal{R}[a]$ sa nazýva **trieda ekvivalencie** $\mathcal{R}$ určená prvkom a .

Veta

Pre každú ekvivalenciu $\mathcal{R}$ na množine A platí:

- (1) $\mathcal{R}[a]$ je neprázdna množina pre každý prvok $a \in A$.*
- (2) Pre každé dva prvky a, b z množiny A buď $\mathcal{R}[a] = \mathcal{R}[b]$, alebo $\mathcal{R}[a] \cap \mathcal{R}[b] = \emptyset$.*
- (3) Ak sú $\mathcal{R}$ a $\mathcal{S}$ dve ekvivalencie na množine A a pre každý prvok a z množiny A platí rovnosť $\mathcal{R}[a] = \mathcal{S}[a]$, potom $\mathcal{R} = \mathcal{S}$.*

Veta

Každá ekvivalencia na neprázdnej množine určuje rozklad tejto množiny a každý rozklad množiny A definuje ekvivalenciu na tejto množine.

Definícia

Nech $A \neq \emptyset$. Binárna relácia $\mathcal{R}$ na množine A je **reláciou čiastočného usporiadania** práve vtedy, ak je reflexívna, antisymetrická a tranzitívna na A .

Usporiadaná dvojica $(A; \mathcal{R})$ sa nazýva **čiastočne usporiadaná množina - ČUM**.

Príkladmi čiastočne usporiadaných množín sú napr.:

- Množina $\mathbb{N}$ s reláciou deliteľnosti – $(\mathbb{N}, |)$,
- Potenčná množina množiny M s reláciou podmnožina – $(P(M), \subseteq)$,
- Množina $\mathbb{R}$ s reláciou usporiadania čísel podľa veľkosti – $(\mathbb{R}, \leq)$.

Definícia

Čiastočne usporiadaná množina $(A; \mathcal{R})$, v ktorej pre všetky $a, b \in A$ platí $a \mathcal{R} b$ alebo $b \mathcal{R} a$ sa nazýva **lineárne usporiadaná množina**.

Nech A je neprázdna podmnožina množiny reálnych čísel $\mathbb{R}$. Potom $(A; \leq)$ je čiastočne usporiadaná množina a je aj lineárne usporiadaná.

Definícia

Nech $(A; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina a nech $a, b \in A$. Hovoríme, že prvok b **pokrýva** prvok a , ak $a \neq b$ a platí:

1. $a \mathcal{R} b$,
2. neexistuje $x \in A$, $x \neq a$, $x \neq b$ taký, že $a \mathcal{R} x \wedge x \mathcal{R} b$.

Čiastočne usporiadané množiny $(A; \mathcal{R})$ budeme znázorňovať pomocou tzv. **Hasseho diagramov**. Vrcholy odpovedajúce prvkom množiny A umiestnime v rovine tak, že ak $a \mathcal{R} b$, tak vrchol a umiestnime nižšie ako vrchol b . Vrcholy a, b spojíme čiarou (hranou) práve vtedy, ak prvok b pokrýva prvok a .

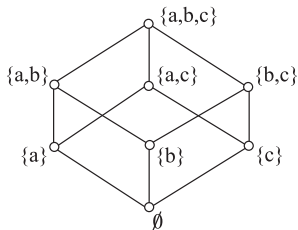
Hasseho diagram

Príklad (a)

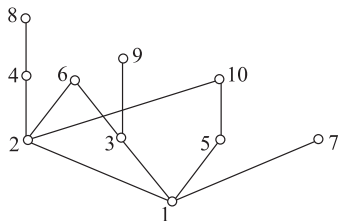
Znázornite Hasseho diagram ČUM $(\mathcal{P}(A), \subseteq)$, ak $A = \{a, b, c\}$.

Príklad (b)

Znázornite Hasseho diagram ČUM $(A, |)$, ak $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.



(a)



(b)

Najväčší a maximálny prvok

Najmenší a minimálny prvok

Definícia

Nech $(A; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Prvok $a \in A$ sa nazýva **najmenší** prvok v $(A; \mathcal{R})$, ak pre každý prvok $x \in A$ platí $a \mathcal{R} x$.

Prvok $a \in A$ sa nazýva **minimálny** prvok v $(A; \mathcal{R})$, ak neexistuje prvok $x \in A$, $x \neq a$ taký, že $x \mathcal{R} a$.

Definícia

Nech $(A; \mathcal{R})$ je čiastočne usporiadaná množina. Prvok $a \in A$ sa nazýva **najväčší** prvok v $(A; \mathcal{R})$, ak pre každý prvok $x \in A$ platí $x \mathcal{R} a$.

Prvok $a \in A$ sa nazýva **maximálny** prvok v $(A; \mathcal{R})$, ak neexistuje prvok $x \in A$, $x \neq a$ taký, že $a \mathcal{R} x$.

Najväčší a maximálny prvok

Najmenší a minimálny prvok

- Najmenší (najväčší) prvok je zároveň aj minimálnym (maximálnym) prvkom čiastočne usporiadanej množiny, ale naopak to neplatí.
- Ak čiastočne usporiadaná množina má najmenší, resp. najväčší prvok, ktorý je jediný, tak je zároveň aj jej minimálnym, resp. maximálnym prvkom.