

GAaDO

Metódy časového plánovania

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

- činnosť A **predchádza** činnosti B (A je predchodca činnosti B alebo činnosť B je následník činnosti A), ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.

- činnosť A **predchádza** činnosti B (A je predchodca činnosti B alebo činnosť B je následník činnosti A), ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.
- Predchádzajúci vzťah voláme **precedenčná relácia** alebo relácia precedencie.

- činnosť A **predchádza** činnosti B (A je predchodca činnosti B alebo činnosť B je následník činnosti A), ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.
- Predchádzajúci vzťah voláme **precedenčná relácia** alebo relácia precedencie.
- Je to binárna relácia na množine všetkých elementárnych činností, ktorá je tranzitívna.

- činnosť A **predchádza** činnosti B (A je predchodca činnosti B alebo činnosť B je následník činnosti A), ak sa činnosť B môže začať vykonávať až po skončení vykonávania činnosti A.
- Predchádzajúci vzťah voláme **precedenčná relácia** alebo relácia precedencie.
- Je to binárna relácia na množine všetkých elementárnych činností, ktorá je tranzitívna.
- Hovoríme, že činnosť A **bezprostredne predchádza** činnosti B (A je bezprostredný predchodca B, alebo B je bezprostredný následník A) ak neexistuje činnosť C taká, že C je nasledovníkom A a súčasne predchodcom B.

Úloha časového plánovania $\mathcal{U}$ je daná TECHNOLOGICKOU TABUĽKOU, t.j.:

Úloha časového plánovania $\mathcal{U}$ je daná TECHNOLOGICKOU TABUĽKOU, t.j.:

- množinou elementárnych činností $\mathcal{E}$,

Úloha časového plánovania $\mathcal{U}$ je daná TECHNOLOGICKOU TABUĽKOU, t.j.:

- množinou elementárnych činností $\mathcal{E}$,
- precedenčnou reláciou na množine $\mathcal{E}$,

Úloha časového plánovania $\mathcal{U}$ je daná TECHNOLOGICKOU TABUĽKOU, t.j.:

- množinou elementárnych činností $\mathcal{E}$,
- precedenčnou reláciou na množine $\mathcal{E}$,
- reálnou funkciou $c : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ priradzujúcou každej činnosti $A \in \mathcal{E}$ dĺžku trvania tejto činnosti $c(A)$ (tá je nemenná).

Zostrojenie digrafu bezprostrednej precedencie $\vec{G} = (V, H, c)$:

- V

Zostrojenie digrafu bezprostrednej precedencie $\vec{G} = (V, H, c)$:

- V je množina všetkých elementárnych činností,
- $c(v) > 0$ vrchola $v \in V$

Zostrojenie digrafu bezprostrednej precedencie $\vec{G} = (V, H, c)$:

- V je množina všetkých elementárnych činností,
- $c(v) > 0$ vrchola $v \in V$ predstavuje čas spracovania príslušnej elementárnej činnosti,
- $H =$

Zostrojenie digrafu bezprostrednej precedencie $\vec{G} = (V, H, c)$:

- V je množina všetkých elementárnych činností,
- $c(v) > 0$ vrchola $v \in V$ predstavuje čas spracovania príslušnej elementárnej činnosti,
- $H = \{(A, B) : A, B \in V, A \text{ je bezprostredný predchodca } B\}$.

Úlohou je:

Vytvoriť rozvrh $\mathcal{U}$, t.j. každej elementárnej činnosti A priradiť časový interval (b_A, c_A) , $b_A < c_A$ v ktorom sa bude činnosť A vykonávať. Pričom b_A znamená začiatok vykonávania činnosti A (b – beginning time), c_A je koniec vykonávania činnosti A (c – completion time). Prípustný rozvrh úlohy $\mathcal{U}$ je taký rozvrh, kde pre ľubovoľné elementárne činnosti A, B platí:

Úlohou je:

Vytvoriť rozvrh $\mathcal{U}$, t.j. každej elementárnej činnosti A priradiť časový interval (b_A, c_A) , $b_A < c_A$ v ktorom sa bude činnosť A vykonávať. Pričom b_A znamená začiatok vykonávania činnosti A (b – beginning time), c_A je koniec vykonávania činnosti A (c – completion time). Prípustný rozvrh úlohy $\mathcal{U}$ je taký rozvrh, kde pre ľubovoľné elementárne činnosti A, B platí:

- 1 $c_A - b_A = c(A)$
- 2 Ak B je bezprostredný nasledovník činnosti A , tak $b_A < c_A \leq b_B < c_B$

- Projekt začína v čase 0.

- Projekt začína v čase 0.
- Kritérium optimality $C_{max} = \max\{c_A : A \in \mathcal{E}\}$.

- Projekt začína v čase 0.
- Kritérium optimality $C_{max} = \max\{c_A : A \in \mathcal{E}\}$.
- C_{max} minimálne, ozn. T - trvanie projektu.

- Projekt začína v čase 0.
- Kritérium optimality $C_{max} = \max\{c_A : A \in \mathcal{E}\}$.
- C_{max} minimálne, ozn. T - trvanie projektu.
- pre každú elementárnu činnosť určujeme:

- Projekt začína v čase 0.
- Kritérium optimality $C_{max} = \max\{c_A : A \in \mathcal{E}\}$.
- C_{max} minimálne, ozn. T - trvanie projektu.
- pre každú elementárnu činnosť určujeme:
 - najskôr možný začiatok $z(v)$ a
 - najneskôr nutný koniec $k(v)$

- Projekt začína v čase 0.
- Kritérium optimality $C_{max} = \max\{c_A : A \in \mathcal{E}\}$.
- C_{max} minimálne, ozn. T - trvanie projektu.
- pre každú elementárnu činnosť určujeme:
 - najskôr možný začiatok $z(v)$ a
 - najneskôr nutný koniec $k(v)$
- Časová rezerva $R(v) = k(v) - z(v) - c(v)$.

- Projekt začína v čase 0.
- Kritérium optimality $C_{max} = \max\{c_A : A \in \mathcal{E}\}$.
- C_{max} minimálne, ozn. T - trvanie projektu.
- pre každú elementárnu činnosť určujeme:
 - najskôr možný začiatok $z(v)$ a
 - najneskôr nutný koniec $k(v)$
- Časová rezerva $R(v) = k(v) - z(v) - c(v)$.
- Kritická činnosť v je $R(v) = 0$.

Algoritmus na určenie najskôr možných začiatkov:

- Krok 1.** Vytvor monotónne očíslovanie $v_1, v_2, \dots, v_n$ vrcholov digrafu $\vec{G} = (V, H, c)$.
- Krok 2.** Každému vrcholu $v \in V$ priradiť dve značky $z(v), x(v)$. Pre každé $v \in V$ inicializačne polož $x(v) := 0$, $z(v) := 0$.
- Krok 3.** Postupne pre $k = 1, 2, \dots, n - 1$ urob: Pre všetky také vrcholy w výstupnej hviezdy vrchola v_k , že $w \neq v_k$, urob: Ak $z(w) < z(v_k) + c(v_k)$, tak $z(w) := z(v_k) + c(v_k)$ a $x(w) := v_k$.
- Krok 4.** Vypočítaj trvanie projektu
 $T := \max\{z(w) + c(w) : w \in V, \text{odeg}(w) = 0\}$

Zložitosť algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov:

Zložitosť algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov:

- Nech $n = |V|$, $m = |H|$

Zložitosť algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov:

- Nech $n = |V|$, $m = |H|$
- krok 1. možno urobiť v čase $O(m + n)$

Zložitosť algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov:

- Nech $n = |V|$, $m = |H|$
- krok 1. možno urobiť v čase $O(m + n)$
- krok 2. vyžaduje čas $O(n)$

Zložitosť algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov:

- Nech $n = |V|$, $m = |H|$
- krok 1. možno urobiť v čase $O(m + n)$
- krok 2. vyžaduje čas $O(n)$
- krok 3.: je potrebné vypočítať n značiek $z(v)$ a $x(v)$.
Robíme toľko porovnaní, koľko je hrán, t. j. m . To vyžaduje celkom čas $O(m + n)$.

Zložitosť algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov:

- Nech $n = |V|$, $m = |H|$
- krok 1. možno urobiť v čase $O(m + n)$
- krok 2. vyžaduje čas $O(n)$
- krok 3.: je potrebné vypočítať n značiek $z(v)$ a $x(v)$.
Robíme toľko porovnaní, koľko je hrán, t. j. m . To vyžaduje celkom čas $O(m + n)$.
- kroku 4. možno urobiť v čase $O(n)$

Zložitosť algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov:

- Nech $n = |V|$, $m = |H|$
- krok 1. možno urobiť v čase $O(m + n)$
- krok 2. vyžaduje čas $O(n)$
- krok 3.: je potrebné vypočítať n značiek $z(v)$ a $x(v)$.
Robíme toľko porovnaní, koľko je hrán, t. j. m . To vyžaduje celkom čas $O(m + n)$.
- kroku 4. možno urobiť v čase $O(n)$

Celý algoritmus má teda zložitosť $O(m + n)$

Algoritmus na určenie najneskôr nutných koncov:

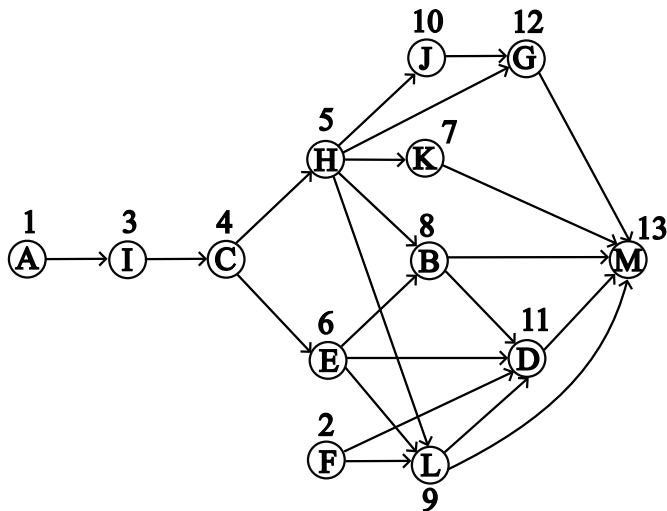
- **Krok 1.** Vytvor monotónne očíslovanie $v_1, v_2, \dots, v_n$ vrcholov digrafu $\vec{G}$.
- **Krok 2.** Každému vrcholu $v \in V$ priradiť dve značky $k(v), y(v)$. Nech T je trvanie projektu. Pre každé $v \in V$ inicializačne polož $k(v) := T, y(v) := 0$.
- **Krok 3.** Postupne pre $i = n - 1, n - 2, \dots, 1$ urob: Pre všetky vrcholy w výstupnej hviezdy vrchola v_i také, že $w \neq v_i$, urob: Ak $k(v_i) > k(w) - c(w)$, tak $k(v_i) := k(w) - c(w)$ a $y(v_i) := w$.

Zložitosť algoritmu na určenie najneskôr nutných koncov vypočítame rovnako ako to bolo v prípade algoritmu na určenie najskôr možných začiatkov. Jeho zložitosť je $O(n + m)$.

CPM-príklad

Názov čin.	Ozn. čin.	Trvanie čin.	bezpr. násled.
výkopy	A	4	I
elek. inštalácie	B	2	D,M
betonové základy	C	3	E,H
vnútorne omietky	D	3	M
priečky	E	8	B,L,D
inžinierske siete	F	3	B,L
okna, dvere	G	1	M
obvodové mury	H	6	B,G,J,K,L
bednenie základov	I	2	C
vonkajšie omietky	J	2	G
strecha	K	6	M
vodovodne inšt.	L	3	D,M
kolaudácia	M	1	-

Digraf bezprostrednej precedencie



Odhad doby trvania činnosti:

- **OPTIMISTICKÝ ODHAD** trvania činnosti (ozn. a): tento odhad vyjadruje najkratšiu možnú dobu trvania činnosti, pričom pri realizácii činnosti sa predpokladá ideálny priebeh
- **PESIMISTICKÝ ODHAD** trvania činnosti (ozn. b): tento odhad vyjadruje najdlhší možný čas uskutočnenia činnosti, pričom pri realizácii tejto činnosti sa počíta so všetkými logickými možnými prekážkami
- **NORMÁLNY ODHAD** (ozn. m): tento odhad zodpovedá najpravdepodobnejšiemu trvaniu danej činnosti.

Štatistická charakterizácia:

- predpokladáme β -rozdelenie pravdepodobnosti,
- β -rozdelenie pravdepodobnosti možno aproximovať Gaussovým rozdelením,
- SMERODAJNÁ ODCHÝLKA $\rho = \frac{b-a}{6}$
- ROZPTYL $\rho^2 = \frac{|b-a|^2}{36}$
- STREDNÁ DOBA TRVANIA ČINNOSTI $\bar{t} = \frac{a+4m+b}{6}$

Prevod PERT na CPM:

- každej činnosti priradíme očakávané doby trvania a, b, m , ktoré redukujeme na strednú dobu trvania $\bar{t}$
- pre každú činnosť vypočítame smerodajnú odchýlku $\rho_{\bar{t}}$ a rozptyl $\rho_{\bar{t}}^2$
- rovnakým postupom ako pri metóde CPM vypočítame dobu trvania T a T^λ . Pravdepodobnosť ukončenia projektu v termíne je 50%.

CPM-příklad

Činnost'	Pesim. o.	Optim.	Norm. o.	Následovn.
t_1	2	10	3	t_2, t_3, t_4
t_2	4	8	6	t_9
t_3	8	18	10	t_{11}, t_{12}
t_4	0	0	0	t_7, t_8
t_5	12	30	15	t_7, t_8
t_6	5	15	7	t_9, t_{10}
t_7	4	14	6	t_{11}, t_{12}
t_8	3	5	4	t_{13}
t_9	7	25	10	t_{13}
t_{10}	4	6	5	t_7, t_8
t_{11}	2	2	2	t_{14}
t_{12}	4	14	7	t_{15}
t_{13}	2	4	3	t_{15}
t_{14}	8	16	9	—
t_{15}	5	7	6	—

GERT (Graphical Evaluation and Review Technique):

- pre siete, kde je možné činnosti začať v čase, keď ešte nie sú všetky predchádzajúce činnosti ukončené. Rozlišujeme:
 - 1 **konjunktívny vstup**, pri ktorom sa uzol realizuje len vtedy, keď sa uskutočnia všetky vstupujúce činnosti,
 - 2 **disjunktívny vstup**, pri ktorom sa uzol realizuje len vtedy, keď sa uskutoční len jedna zo vstupných činností; ostatné sa vylučujú,
 - 3 **inkluzívny vstup**, pri ktorom sa uzol realizuje, keď sa uskutoční aspoň jedna činnosť; uskutočňovať sa môžu aj ostatné činnosti.
- aplikácie sa objavujú v riadení výskumných projektov a v strojárenskej výrobe.

Náklady v sieťovom plánovaní

- finančné náklady na prevedenie jednotlivých činností
- dva druhy:
 - ① náklady na normálne trvanie danej činnosti
 - ② zvýšené náklady na skrátenie danej činnosti na minimálnu možnú hodnotu
- nákladový koeficient, ktorý predstavuje prírastok nákladov pri skrátení danej činnosti o 1 časovou jednotku
- má zmysel skracovať tie činnosti na kritickej ceste, ktoré majú čo najmenší nákladový koeficient

Náklady v sieťovom plánovaní

- začíname prevedením CPM pre normálne trvanie činností s normálnymi nákladmi
- po zvolení činnosti pre skrátenie pokračuje opätovným prevedením CPM pre nové trvanie činností. Náklady na nové trvanie projektu sa zvýšia o hodnotu odpovedajúcu činnosti.
- tento postup opakujeme až kým neskrátíme dobu trvania projektu na požadovanú dĺžku.