

Matematika III – pomocný 3

DIFERENCIÁLNE ROVNICE

a) Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu bez pravej strany

Rovnice typu: $f(x).y' + f(y) = 0$

prvého rádu = najvyššia prvá derivácia - y'

bez pravej strany = na pravej strane rovnice **nula**

pomocné vzorce:

$$\ln e^y = y \quad e^{\ln x} = x$$

$$e^{\ln x + c} = e^{\ln x} \cdot e^c = x \cdot e^c = x \cdot c$$

$$e^{2x+c} = e^{2x} \cdot e^c = e^{2x} \cdot c$$

$$\ln a + \ln b = \ln(a \cdot b)$$

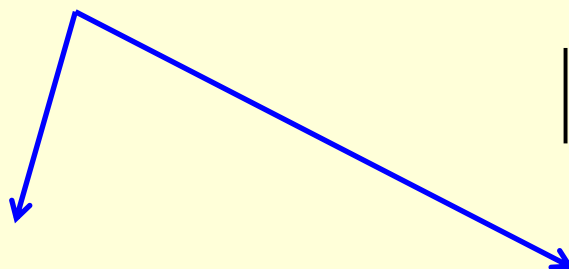
$$\ln a - \ln b = \ln \frac{a}{b}$$

Úprava rovnice:

1. nahradíme $y' = \frac{dy}{dx}$
2. separujeme premenné (oddelíme y , dy na jednu stranu a x , dx na druhú, tak aby dy a dx boli v čitateli)
3. upravené strany integrujeme (úprava pomocou per partes, substitúcia alebo obyčajný integrál)
4. vo výsledku výrazy s rovnakou premenou necháme na tej istej strane

Opakovanie - Metóda per partes riešenia neurčitých integrálov

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$



$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = & v'(x) = \\ u'(x) = & v(x) = \end{array} \right|$$

1. prípad: $u(x) = P_n(x)$

2. prípad: $v'(x) = P_n(x)$

$$\begin{aligned} &\int P_n(x) \cdot e^{kx} dx \\ &\int P_n(x) \cdot \cos kx dx \\ &\int P_n(x) \cdot \sin kx dx, \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

derivujeme $P_n(x)$

$$\begin{aligned} &\int P_n(x) \cdot \ln x dx \\ &\int P_n(x) \cdot \arcsin x \text{ (resp. } \arccos x) dx \\ &\int P_n(x) \cdot \arctg x \text{ (resp. } \operatorname{arccotg} x) dx \end{aligned}$$

integrujeme $P_n(x)$

1. prípad:

$$\int (3-x) \sin \frac{x}{2} dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u = 3 - x & v' = \sin \frac{x}{2} \\ u' = -1 & v = -2 \cos \frac{x}{2} \end{array} \right|$$

$$= -2(3-x) \cos \frac{x}{2} - \int 2 \cos \frac{x}{2} dx = (2x-6) \cos \frac{x}{2} - 4 \sin \frac{x}{2} + C$$

2. prípad:

$$\int (4x^3 + 2x) \operatorname{arctg} x \, dx$$

$$\left| \begin{array}{ll} u(x) = \operatorname{arctg} x & v'(x) = 4x^3 + 2x \\ u'(x) = \frac{1}{1+x^2} & v(x) = 4\frac{x^4}{4} + 2\frac{x^2}{2} \end{array} \right|$$

$$= (x^4 + x^2) \operatorname{arctg} x - \int \frac{x^4 + x^2}{1+x^2} dx = (x^4 + x^2) \operatorname{arctg} x - \int x^2 dx =$$

$$= (x^4 + x^2) \operatorname{arctg} x - \frac{x^3}{3} + C$$

$$\begin{array}{l} (x^4 + x^2) : (x^2 + 1) = x^2 \\ \underline{-(x^4 + x^2)} \\ 0 \end{array}$$

b) Lineárne diferenciálne rovnice prvého rádu s pravou stranou

Rovnice typu: $y' + p(x)y = q(x)$

pomocné vzorce:

$$-\ln x = \ln x^{-1}$$

$$2 \ln x = \ln x^2, \quad \frac{1}{3} \ln x = \ln x^{\frac{1}{3}}$$

$$e^{\ln x^2} = x^2$$

$$e^{\ln x^{-1}} = e^{\ln \frac{1}{x}} = \frac{1}{x}$$

prvého rádu = najvyššia prvá derivácia - y'

s pravou stranou = na pravej strane rovnice je **funkcia $q(x)$**

Úprava rovnice: 2. spôsob:

1. upravíme rovnicu tak, aby člen y' bol osamotený (násobíme alebo delíme celú rovnicu)

Napr.: rovnicu $xy' + 4y = \frac{e^x}{x^3}$, predelíme x , potom $y' + \frac{4y}{x} = \frac{e^x}{x^4}$

2. upravenú rovnicu vynásobíme integračným faktorom $IF = e^{\int p(x)dx}$ (najprv učíme $p(x)$, potom vypočítame $\int p(x)dx$ a nakoniec IF)

$$\underline{y' \cdot e^{\int p(x)dx}} + p(x) \cdot e^{\int p(x)dx} y = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Napr.:

$$y' + \frac{4y}{x} = \frac{e^x}{x^4}, \quad \text{kde } p(x) = \frac{4}{x}$$
$$\int \frac{4}{x} dx = \ln x^4, \quad IF = e^{\ln x^4} = x^4$$

3. ľavá strana rovnice predstavuje súčin derivácie funkcie y a IF (pri jej úprave z prvého člena súčinu na ľavej strane rovnice opíšeme y bez derivácie a IF)

$$[y \cdot e^{\int p(x)dx}]' = q(x) \cdot e^{\int p(x)dx}.$$

Napr.:

$$y'x^4 + 4yx^3 = e^x$$

úprava ľavej strany: prvý člen je y a druhý je x^4

$$(yx^4)' = e^x$$

3. integrujeme obe strany rovnice

$$y \cdot e^{\int p(x) dx} = \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c,$$

kde využijeme, že $\int (y \cdot e^{\int p(x) dx})' dy = y \cdot e^{\int p(x) dx}$

Napr.:

$$\int (y \cdot x^4)' = \int e^x dx$$

Úprava ľavej strany: $y \cdot x^4 = \int e^x dx$

4. upravíme ľavú stranu rovnice (vynásobíme alebo delíme vhodným výrazom, aby na ľavej strane zostalo len **y**)

$$y = e^{-\int p(x) dx} \cdot \int q(x) \cdot e^{\int p(x) dx} dx + c \cdot e^{-\int p(x) dx}, c \in \mathbb{R}.$$

Napr.:

$$y \cdot x^4 = \int e^x dx = e^x + c$$

Úprava rovnice (predelíme celú rovnicu x^4):

$$y = \frac{e^x}{x^4} + \frac{c}{x^4}$$

c) Lineárne diferenciálne rovnice druhého rádu bez pravej strany

Rovnice typu: $y'' + ay' + by = 0$

druhého rádu = najvyššia druhá derivácia - y''
bez pravej strany = na pravej strane rovnice **nula**

Úprava rovnice:

1. vytvoríme charakteristickú rovnicu $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$
(nahradíme v rovnici $y'' \rightarrow \lambda^2, y' \rightarrow \lambda, y$ - vynecháme)

2. riešime charakteristickú rovnicu ako kvadratickú rovnicu a určíme diskriminant

a) ak $D > 0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 \neq \lambda_2$

potom dve riešenia charakteristickej rovnice $y_1 = e^{\lambda_1 x}, y_2 = e^{\lambda_2 x}$

všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}$

Napr.: $D = 9, \lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1$

Všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-x}$

b) ak $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ (dvojnásobný koreň charakteristickej rovnice)

potom riešenia charakteristickej rovnice $y_1 = e^{\lambda x}, y_2 = x e^{\lambda x}$

všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{\lambda x} + c_2 x e^{\lambda x}$

Napr.: $D = 0, \lambda_1 = \lambda_2 = -1$

Všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}$

c) ak $\mathbf{D} < \mathbf{0}$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}, \lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$

potom riešenia charakteristickej rovnice $y_1 = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2 = e^{\alpha x} \sin \beta x$

všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + c_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

Napr.: $D = -4 = 4i^2, \lambda_1 = -1 + 3i, \lambda_2 = -1 - 3i$

$\lambda_1 = \alpha + \beta i, \lambda_2 = \alpha - \beta i$

porovnaním výsledkov zo všeobecným zápisom, $\alpha = -1, \beta = 3$

všeobecné riešenie dif. rovnice je $y = c_1 e^{-x} \cos 3x + c_2 e^{-x} \sin 3x$

c) Diferenciálne rovnice druhého rádu s pravou stranou

Rovnice typu: $y'' + ay' + by = f(x)$

druhého rádu = najvyššia druhá derivácia - y''

bez pravej strany = na pravej strane rovnice **funkcia $f(x)$**

Úprava rovnice:

1. riešime rovnicu bez pravej strany (môžu tri prípady riešenia)

2. riešime rovnicu s pravou stranou

riešenie dif. rovnice = všeob. riešenie DR bez pravej strany + partikulárne riešenie y^*

3. určíme partikulárne riešenie y^* podľa pravej strany DR

a) ak na pravej strane funkcia typu

$$f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$$

kde $P_m(x)$ – polynóm m – tého stupňa

$\alpha \in R$, α je k – násobný koreň charakteristickej rovnice DR bez pravej strany

partikulárne riešenie $y^* = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m)e^{\alpha x}x^k$

Napr.: 1) $f(x) = (5x^1 + 2)e^{2x}$, $\alpha = 2$ je 1- násobný koreň charakteristickej rovnice

porovnaním s $y^* = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_mx^m)e^{\alpha x}x^k$

$$\alpha = 2$$

$$m = 1$$

$$k = 1$$

potom $y^* = (a + bx)e^{2x}x^1$

2) $f(x) = (-8x)e^{-x}$, α nie je k - násobný koreň charakteristickej rovnice

$$\alpha = -1$$

$$m = 1$$

$$k = 0$$

potom $y^* = (a + bx)e^{-x}$

3) $f(x) = x^2 + 3x - 5$, α nie je k - násobný koreň charakteristickej rovnice

$$\alpha = 0$$

$$m = 2$$

$$k = 0$$

potom $y^* = ax^2 + bx + c$

Poznámka: pri učovaní k musí byť α koreňom charakteristickej rovnice DR bez pravej strany

b) ak na pravej strane funkcia typu

$f(x) = \left(P_{n_1}^{(1)}(x) \cos \beta x + P_{n_2}^{(2)}(x) \sin \beta x \right) e^{\alpha x}$, kde $P_{n_1}^{(1)}(x)$, $P_{n_2}^{(2)}(x)$ sú polynómy stupňa n_1, n_2 , $\alpha, \beta \in R$, $\beta \neq 0$ a $\alpha + \beta i$ je k -násobným koreňom charakteristickej rovnice danej diferenciálnej rovnice bez pravej strany,

partikulárne riešenie $y^* = Q_m^{(1)}(x)(\cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x) e^{\alpha x} x^k$

kde $Q_m^{(1)}(x)$, $Q_m^{(2)}(x)$ - sú polynómy stupňa **$m = \max \{n_1, n_2\}$**

Napr.: 1) $f(x) = 8 \cos x$, $\alpha + \beta i$ nie je koreň k-násobný koreň charakteristickej rovnice

porovnaním s $y^* = Q_m^{(1)}(x)(\cos \beta x + Q_m^{(2)}(x) \sin \beta x) e^{\alpha x} x^k$

$$\alpha = 0, \beta = 1$$

$$m = 0 \quad (8x^0 = 8)$$

$$k = 0$$

potom $y^* = a \cos x + b \sin x$

2) $f(x) = 4 \cos 2x + \sin 2x$, $\alpha + \beta i$ nie je koreň charak. rovnice

$$\alpha = 0, \beta = 2$$

$$m = 0$$

$$k = 0$$

potom $y^* = a \cos 2x + b \sin 2x$

3) $f(x) = \sin(3x)e^{-x}$, $\alpha + \beta i$ nie je koreň charak. rovnice

$$\alpha = -1, \beta = 3$$

$$m = 0$$

$$k = 0$$

potom $y^* = (a \cos 3x + b \sin 3x)e^{-x}$

Poznámka: pri učovaní k musí byť $\alpha + \beta i$ koreňom charak. rovnice DR bez pravej strany

4. vypočítame prvú a druhú deriváciu partikulárneho riešenie y^* a dosadíme do DR s pravou stranou $(y^*)'' + a(y^*)' + by^* = f(x)$
5. po úprave rovnice porovnáme koeficienty ($a, b, c, \dots$) pri rovnakých členoch na pravej a ľavej strane DR a vypočítame ich hodnotu

Napr.: úpravou DR vyšlo

$$-4a \cos 2x - 4b \sin 2x - 6a \sin 2x + 6b \cos 2x = 4 \cos 2x + \sin 2x$$

porovnaním koeficientov pri $\cos 2x$ a $\sin 2x$

$$\cos 2x: -4a + 6b = 4$$

$$\sin 2x: -4b - 6a = 1$$

6. dosadíme vypočítané hodnoty koeficientov do partikulárneho riešenie y^* a zapíšeme výsledok DR s pravou stranou v tvare

riešenie dif. rovnice = všeob. riešenie DR bez pravej strany + partikulárne riešenie y^*

$$y'' + 4y' = \sin x$$

1. $y'' + 4y' = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4\lambda = 0$

$$\lambda(\lambda + 4) = 0$$

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_2 = -4$$

$$y = C_1 x^0 + C_2 x^{-4} = \underline{C_1 + C_2 x^{-4}}$$

2. $y'' + 4y' = \sin x \quad f(x) = \sin x \quad m = 0$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 1$$

$$k = 0$$

$$y^* = a \cos x + b \sin x$$

$$(y^*)' = -a \sin x + b \cos x$$

$$(y^*)'' = -a \cos x - b \sin x$$

$$(y^*)'' + 4(y^*)' = \sin x$$

$$- \underbrace{a \cos x} - \underbrace{b \sin x} - \underbrace{4a \sin x} + \underbrace{4b \cos x} = \underbrace{\sin x}$$

$$\cos x: \quad -a + 4b = 0 \quad \rightarrow a = 4b$$

$$\sin x: \quad -b - 4a = 1 \quad \leftarrow -b - 4(4b) = 1$$

$$y = c_1 x^0 + c_2 x^{-4x} + y^*$$

$$y = c_1 + c_2 x^{-4x} - \left(\frac{4 \cos x + \sin x}{17} \right)$$

$$-17b = 1$$

$$b = -\frac{1}{17}$$

$$a = 4\left(-\frac{1}{17}\right) = -\frac{4}{17}$$

$$y^* = -\frac{4}{17} \cos x - \frac{1}{17} \sin x$$

Pr. 62/128

$$y'' + 4y = e^x \sin 2x$$

$$! i^2 = -1 !$$

1.

$$y'' + 4y = 0 \rightarrow \lambda^2 + 4 = 0$$

$$\lambda^2 = -4 = 4i^2 \in \mathbb{C}$$

$$y = c_1 e^0 \cos 2x + c_2 \sin 2x$$

$$\lambda_{1,2} = \pm 2i$$

$$\lambda_1 = \alpha + \beta i$$

$$\lambda_2 = \alpha - \beta i$$

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 2$$

2. $y'' + 4y = e^x \sin 2x$

$$f(x) = e^x \sin 2x$$

$$m = 0$$

$$\alpha = 1$$

$$\beta = 2$$

$$k = 0$$

$$y^* = (a \cos 2x + b \sin 2x) e^x$$

$$y^* = \underbrace{a \cos(2x)}_m \underbrace{e^x}_m + \underbrace{b \sin(2x)}_m \underbrace{e^x}_m$$

$$(y^*)' = -a 2 \sin(2x) e^x + a \cos(2x) \cdot e^x + 2b \cos(2x) e^x + b \sin(2x) \cdot e^x$$

$$(y^*)'' = \underbrace{-4a \cos(2x) e^x}_{\text{red}} - \underbrace{2a \sin(2x) e^x}_{\text{blue}} - \underbrace{2a \sin(2x) e^x}_{\text{blue}} +$$

$$\underbrace{a \cos(2x) e^x}_{\text{red}} - \underbrace{4b \sin(2x) e^x}_{\text{purple}} + \underbrace{2b \cos(2x) e^x}_{\text{green}} +$$

$$\underbrace{2b \cos(2x) e^x}_{\text{green}} + \underbrace{b \sinh 2x \cdot e^x}_{\text{purple}}$$

$$(y^*)'' + 4y^* = e^x \sin 2x$$

$$\underbrace{-3a \cos(2x) e^x}_{\text{blue}} - \underbrace{4a \sin(2x) e^x}_{\text{red}} - \underbrace{3b \sin(2x) e^x}_{\text{red}} + \underbrace{4b \cos(2x) e^x}_{\text{blue}}$$

$$+ \underbrace{4a \cos(2x) e^x}_{\text{blue}} + \underbrace{4b \sin(2x) e^x}_{\text{red}} = \underline{e^x \sin 2x}$$

$$\cos x: \quad -3a + 4b + 4a = 0 \rightarrow a = -4b$$

$$\sin x: \quad -4a - 3b + 4b = 1 \rightarrow -4a + b = 1$$

$$-4(-4b) + b = 1$$

$$16b + b = 1$$

$$\underline{b = \frac{1}{17}}$$

$$\underline{a = -\frac{4}{17}}$$

$$y^* = \left(-\frac{4}{17} \cos 2x + \frac{1}{17} \sin 2x \right) e^x$$

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{\sin 2x - 4 \cos 2x}{17} e^x$$

Pr. 61/120

$$y'' - 5y' + 6 = x e^{3x}$$

1. $y'' - 5y' + 6 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 6 = 1$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm 1}{2 \cdot 1} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

2. $y'' - 5y' + 6 = x e^{3x}$

$$f(x) = x e^{3x}$$

$$m = 1, \alpha = 3, k = 1$$

$$y^* = (a + bx) e^{3x} \cdot x = ax e^{3x} + bx^2 e^{3x}$$

$$(y^*)' = a e^{3x} + ax \cdot 3 e^{3x} + b \cdot 2x e^{3x} + bx^2 \cdot 3 e^{3x}$$

$$(y^*)'' = \underline{a \cdot 3 e^{3x}} + \underline{a \cdot 3 e^{3x}} + \underline{ax e^{3x} \cdot 9} + \underline{b \cdot 2 e^{3x}} + \underline{6bx e^{3x}} + \underline{6bx e^{3x}} + bx^2 \cdot 9 e^{3x}$$

$$6a e^{3x} + 12bx e^{3x} + ax e^{3x} \cdot 9 + 2b e^{3x} + 6bx e^{3x} + bx^2 \cdot 9 e^{3x}$$

$$(y^*)'' - 5(y^*)' + 6y = x e^{3x}$$

$$\begin{aligned} & \underline{6a} e^{3x} + \underline{12xb} e^{3x} + \underline{9ax} e^{3x} + \underline{2b} e^{3x} + \underline{9bx^2} e^{3x} - \underline{5a} e^{3x} - \underline{5ax \cdot 3} e^{3x} - \underline{5b \cdot 2} e^{3x} \\ & - \underline{5bx^2 \cdot 3} e^{3x} + \underline{6ax} e^{3x} + \underline{6bx^2} e^{3x} = \underline{x \cdot e^{3x}} \end{aligned}$$

$$x^0: \quad 6a + 2b - 5a = 0 \rightarrow a = -2b$$

$$x^1: \quad 12b + 9a - 15a - 10b + 6b = 0$$

$$y^* = \left(-1 + \frac{1}{2}x\right) x \cdot e^{3x} = \left(\frac{x^2}{2} - x\right) e^{3x} \quad 2b = 1 \rightarrow b = \frac{1}{2}$$

$$a = -2 \cdot \frac{1}{2} = -1$$

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} - x\right) e^{3x}$$

Pr. 63/116

$$y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 2x + 1$$

1. $y'' - 5y' + 6 = 0$ 2 Pr. 120

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x}$$

2. $y'' - 5y' + 6y = 12x^2 - 2x + 1$

$$f(x) = 12x^2 - 2x + 1$$

$$m = 2$$

$$L = 0$$

$$K = 0$$

$$y^* = ax^2 + bx + c$$

$$(y^*)' = 2ax + b$$

$$(y^*)'' = 2a$$

$$-10 \cdot 2 + 6b = -2$$

$$6b = 18$$

$$b = 3$$

$$y^* = 2x^2 + 3x + 2$$

$$(y^*)'' - 5(y^*)' + 6y^* = 12x^2 - 2x + 1$$

$$\underbrace{2a}_{x^2} - \underbrace{10ax}_{x^1} - \underbrace{5b}_{x^0} + \underbrace{6ax^2}_{x^2} + \underbrace{6bx}_{x^1} + \underbrace{6c}_{x^0} = \underbrace{12x^2}_{x^2} - \underbrace{2x}_{x^1} + \underbrace{1}_{x^0}$$

$$x^2:$$

$$6a = 12 \rightarrow a = 2$$

$$x^1:$$

$$-10a + 6b = -2$$

$$x^0:$$

$$2a - 5b + 6c = 1$$

$$2 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + 6c = 1$$

$$6c = 12$$

$$c = 2$$

$$y = C_1 e^{3x} + C_2 e^{2x} + 2x^2 + 3x + 2$$