

Matematika I.

Množiny

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Množina je súbor navzájom rozlíšiteľných objektov.

- Jednoduchý pojem, ktorý nedefinujeme.
- Množinu považujeme za určenú, ak vieme o ľubovoľnom objekte rozhodnúť, či patrí alebo nepatrí do danej množiny.
- Hovoríme, že objekt a je prvkom množiny M , ak patrí do množiny M , ozn. $a \in M$.
- Hovoríme, že objekt a nie je prvkom množiny M , ak nepatrí do množiny M , ozn. $a \notin M$.

Množinu, ktorá neobsahuje žiadne prvky, nazývame **prázdnu množinou**. Označujeme ju $\emptyset$, alebo $\{\}$.

!!! Pozor! Toto $\{\emptyset\}$ nie je prázdna množina !!!

Definícia

Hovoríme, že **množina A je podmnožinou množiny B** a píšeme $A \subseteq B$, ak každý prvok množiny A je prvkom množiny B . Ak chceme zdôrazniť, že $A \subseteq B$ a $A \neq B$, tak píšeme $A \subset B$ a hovoríme, že A je **vlastná podmnožina** množiny B .

- Ak A nie je podmnožinou B , píšeme $A \not\subseteq B$.
- Pre každú množinu A platí: $\emptyset \subseteq A$, $A \subseteq A$,
!!! Pozor neplatí: $A \subset A$!!!

Definícia

Hovoríme, že **množiny A, B sa rovnajú**, ak je splnené, že $A \subseteq B$ a zároveň aj $B \subseteq A$.

Definícia

Pod pojmom **mohutnosť** množiny budeme rozumieť počet jej prvkov. Mohutnosť množiny M budeme označovať $|M|$.

- Ak je počet prvkov množiny konečný, tak hovoríme o **konečnej** množine.
- Ak je počet prvkov množiny nekonečný, tak hovoríme o **nekonečnej** množine. Nekonečné množiny delíme na:
 - spočítateľné a
 - nespočítateľné.

Množiny s menším počtom prvkov, môžeme zadať vymenovaním ich prvkov.

Ak je množina veľká, tak množinu zadávame určením spoločnej vlastnosti.

Operácie s množinami

Nech $A, B \subseteq M$:

- **zjednotenie množín:**

$$A \cup B = \{x \in M : (x \in A) \text{ alebo } (x \in B)\}$$

- **prienik množín:**

$$A \cap B = \{x \in M : (x \in A) \text{ a } (x \in B)\}$$

- **rozdiel množín:**

$$A - B = \{x \in M : (x \in A) \text{ a } (x \notin B)\}$$

- **symetrický rozdiel (symetrická diferencia):**

$$A \div B = A \dot{\cup} B = \{x \in M; x \in (A \cup B) \text{ a } x \notin (A \cap B)\}$$

- **komplement (doplnok) v M k A :**

$$\overline{A} = \{x \in M : x \notin A\}$$

Komplement množiny A často označujeme aj A' alebo A^c .

De Morganove vzorce a iné zákony

Nech $A, B, C \subseteq M$:

1 De Morganove vzorce:

1 $\overline{(A \cup B)} = \overline{A} \cap \overline{B},$

2 $\overline{(A \cap B)} = \overline{A} \cup \overline{B}.$

2 Komutatívny zákon: $(A \cup B) = (B \cup A),$ $(A \cap B) = (B \cap A).$

3 Asociatívny zákon: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C),$ $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$

4 Distributívny zákon: $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),$ $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$

Nech I je množina, ktorej budeme hovoriť **množina indexov** a pre každé $i \in I$ je definovaná množina $A_i \subseteq M$. Hovoríme, že je daný systém množín $\{A_i : i \in I\}$.

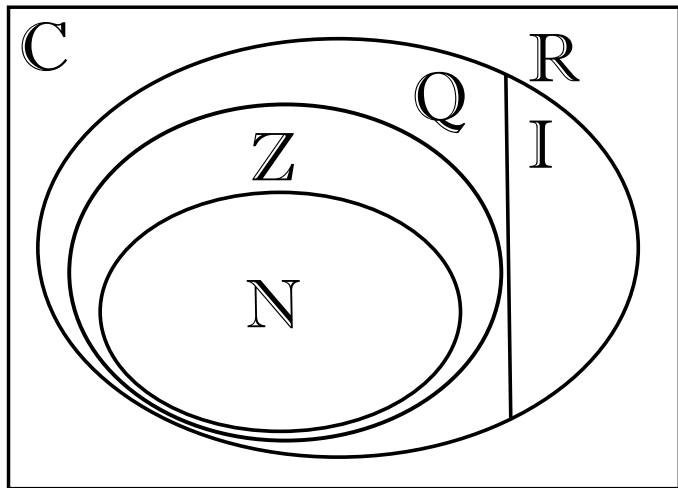
Definícia

- 1 **Zjednotenie systému množín** $\{A_i : i \in I\}$ je množina $\bigcup_{i \in I} A_i$ práve tých prvkov z M , ktoré patria do niektorej z množín A_i .
- 2 **Prienik systému množín** $\{A_i : i \in I\}$ je množina $\bigcap_{i \in I} A_i$ práve tých prvkov z M , ktoré patria do každej množiny A_i .
- 3 **Rozklad množiny** $M \neq \emptyset$ je taký systém $\{A_i : i \in I\}$, pre ktorý platí:
 - $\bigcup_{i \in I} A_i = M$,
 - $A_i \cap A_j = \emptyset$, pre každé $i, j \in I, i \neq j$.

Číselne množiny

- $\mathbb{N}$ - množina prirodzených čísel,
- $\mathbb{Z}$ - množina celých čísel,
- $\mathbb{Q}$ - množina racionálnych čísel,
- $\mathbb{I}$ - množina iracionálnych čísel,
- $\mathbb{R}$ - množina reálnych čísel,
- $\mathbb{C}$ - množina komplexných čísel,

Častokrát sa používajú označenia $\mathbb{N}^+, \mathbb{Z}^+, \mathbb{Q}^+, \mathbb{I}^+, \mathbb{R}^+$ a
 $\mathbb{N}^-, \mathbb{Z}^-, \mathbb{Q}^-, \mathbb{I}^-, \mathbb{R}^-$



Definície číselných množín

Definícia

- $1 \in \mathbb{N}$,
- *ak $n \in \mathbb{N}$, tak aj $n + 1 \in \mathbb{N}$.*

*Potom $\mathbb{N}$ nazývame množinou všetkých **prirodzených čísel**.*

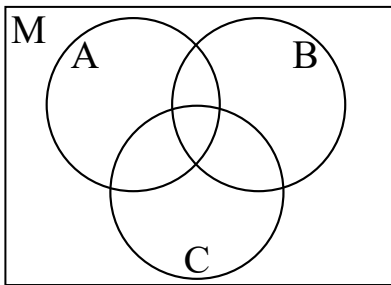
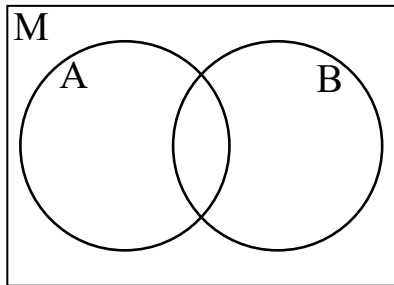
POZOR!!! $0 \notin \mathbb{N}$. Množinu $\mathbb{N} \cup \{0\}$ budeme označovať $\mathbb{N}_0$.

Definícia

- $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{-a : a \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$
- $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$
- $\mathbb{I} = \{x : x \notin \mathbb{Q}\}$
- $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$
- $\mathbb{C} = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\}$

Vennove diaframy

Vennov diagram je grafická reprezentácia množín a ich vzťahov, ktorá využíva kruhy alebo elipsy na znázornenie prienikov, zjednotení a rozdielov medzi týmito množinami.

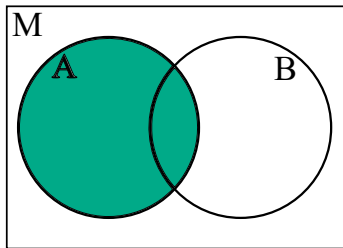


Vennove diaframy

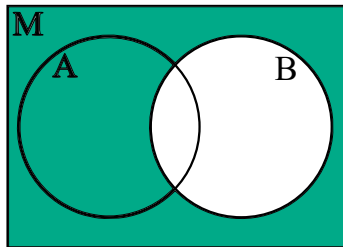
Príklad

Pomocou Vennových diagramov dokážte, že platí:

$$\emptyset = (A - \bar{B}) - (A \cap B)$$



(a) A



(b) $\bar{B}$

Definícia

Potenčná množina $\mathcal{P}(M)$ množiny M obsahuje všetky podmnožiny množiny M . Ak $|M| = n$, tak $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$.

Príklad

Nech $A = \{a, b, c\}$. Napíšte, čomu sa rovná potenčná množina A .

Riešenie:

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Nech $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$:

- **ohraničené intervaly**

- **uzavřený interval:** $\langle a, b \rangle = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- **otevřený interval:** $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- **polouzavreté (polootvorené) intervaly:**
 - $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$
 - $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

- **neohraničené intervaly**

- $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\}$
- $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} : x < b\}$
- $\langle a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$
- $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$
- $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$

Definícia

Nech $\varepsilon > 0$, $a \in \mathbb{R}$:

- **ε -ové okolie bodu a** $O_\varepsilon(a) = (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$
- **prstencové ε -ové okolie bodu a** $O_\varepsilon^0(a) = O_\varepsilon - \{a\}$
- **pravé ε -ové okolie bodu a** $O_\varepsilon^+(a) = (a, a + \varepsilon)$
- **ľavé ε -ové okolie bodu a** $O_\varepsilon^-(a) = (a - \varepsilon, a)$

Maximum a minimum množiny

Definícia

Nech M je podmnožina $\mathbb{R}$.

*Ak existuje také reálne číslo $a \in M$, že pre každé $x \in M$ je $x \leq a$, tak číslo a nazývame **maximum** množiny M .*

Označujeme: $a = \max M$

Definícia

Nech M je podmnožina $\mathbb{R}$.

*Ak existuje také reálne číslo $b \in M$, že pre každé $x \in M$ je $x \geq b$, tak číslo b nazývame **minimum** množiny M .*

Označujeme: $b = \min M$

Horné a dolné ohraničenie množiny

Definícia

Nech M je neprázdna podmnožina $\mathbb{R}$.

*Ak existuje také číslo $K \in \mathbb{R}$, že $\forall x \in M : x \leq K$, tak číslo K nazývame **horné ohraničenie** množiny M a hovoríme, že M je **zhora ohraničená**.*

Definícia

Nech M je neprázdna podmnožina $\mathbb{R}$.

*Ak existuje také číslo $k \in \mathbb{R}$, že $\forall x \in M : x \geq k$, tak číslo k nazývame **dolné ohraničenie** množiny M a hovoríme, že M je **zdola ohraničená**.*

Definícia

*Ak je neprázdna množina zdola aj zhora ohraničená, tak hovoríme, že je **ohraničená**.*

Suprémum a infimum množiny

Definícia

Najmenšie horné ohraničenie S množiny M nazývame **suprémum** množiny M .

Označujeme: $s = \sup M$.

Definícia

Najväčšie dolné ohraničenie s množiny M nazývame **infimum** množiny M .

Označujeme: $s = \inf M$.