DOBRÉ RÁNO :)

EKVIVALENTNÍ ÚPRAVY MATICE (maticové / sloupcové)

1) Změna pořadí maticových (sloupcových)
2) vynásobení matice (sloupce) nenulovým koeficientem
3) přičítání k jedné maticové (sloupcové) matici maticových (sloupcových) k jiné matici (resp. sloupci).

{ poznámka: násobení matice (sloupce) maticí (sloupcem) k jedné matici }

ekvivalentní matice A a B

zapisujeme $A \sim B$

(A může na B pomocí ekvivalentních úprav)

příklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot 6 \end{matrix}$$

typ. 3×3

{ matice 3 stupňů }

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 18 & 12 \\ -3 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Def. HODNOST MATICE (anglicky $h(A)$)

{ počet nenulových řádků matice A upravené (ekvivalentními úpravami) na trojúhelníkový tvar. Lze i stupňovitý tvar }

příklad URČETE $h(A)$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pod diagonálou vynulujeme nuly

(resp. pod hlavní nenulovou prvek nenulových nuly)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 6 & -2 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-3) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & -10 & -10 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & -15 & -15 & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-3) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

matice je už upravená na schodovitý tvar.

$$\boxed{h(A) = 2}$$

SOUSTAVY LINEÁRNÍCH ROVNIC

$$(*) \quad \left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}\right\}$$

řešíme pro neznámé a ne neznámých

kde a_{ij} jsou konstantní koeficienty

$x_1, \dots, x_n$ jsou neznámé

$b_1, \dots, b_m$ jsou pravé strany

otázka MATICAM mám nějakou vlastnost eliminace soustavy:

nech $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$ $(m \times n)$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ (sloupcový vektor $(n \times 1)$), $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$ $(m \times 1)$

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & & & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$m \times n$ $\quad$ $n \times 1$ $\quad$ $m \times 1$

násobení: $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$ } je to rovnice soustavy

$\dots$

$a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m$

Soustava $(*)$ mamo zapsat pomocí matic a tvaru

$$A\vec{x} = \vec{b}$$

A .. matice soustavy $\quad A = (a_{ij})$

$\vec{x}$ .. vektor neznámých

$\vec{b}$ .. vektor pravých stran

$\bar{A}$ ... rozšířená matice soustavy (matice soustavy + pravé strany)

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & & & \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

příklady

① $x_1 + y = 2$, $x - y = 0$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$h(A) = 2$, $h(\bar{A}) = 1$

② $x + y = 2$, $2x + 2y = 4$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$h(A) = 1$, $h(\bar{A}) = 1$

③ $x + y = -2$, $x + y = -3$

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$h(A) = 1$, $h(\bar{A}) = 2$

$h(A) = 2$ $\quad$ $\boxed{\text{nekonečno}}$

nekonečno řešení: $x = k, y = 1$

$h(A) = 2$ $\quad$ $\boxed{\text{nekonečno}}$

nekonečno řešení: $x = k, y = 1$

$h(A) = 1$, $h(\bar{A}) = 2$

nekonečno, nebo nemá řešení

$h(A) = 1$, $h(\bar{A}) = 2$

nekonečno, nemá řešení

FROBENIOVA VETA

Soustava $(*)$ má nějaké řešení právě když $h(A) = h(\bar{A})$.

Dk. a) $h(A) = n$ (počet neznámých), tak soustava má právě jedno řešení

b) $h(A) < n$, tak soustava má nekonečně mnoho řešení.

Poznámka: Dk. $h(A) \neq h(\bar{A})$, tak soustava $(*)$ nemá řešení

Gaussova eliminační metoda

metoda na nalezení všech lineárních rovnic

postup: z koeficientů dané soustavy vytvoříme rozšířenou matici $\bar{A}$ (rozšířená matice).

1) upravíme $\bar{A}$ na tvar horní

2) určíme $h(A), h(\bar{A})$

3) na základě FROBENIOVY věty zjistíme zda (máme nalezené alespoň řešení)

4) ale máme nalezené, tak to vyjádříme

příklady: Pomocí GEM řešení

$$\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 2x_4 &= -10 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 &= -5 \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 5x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -2 & 2 & 2 & -2 & -10 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 3 & 1 & -1 & 4 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-2) \\ \\ \cdot(-3) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & -2 & 2 & 10 \\ 1 & -1 & 3 & 1 & -5 \\ 1 & 3 & -2 & 2 & -6 \end{array}\right) \begin{matrix} \cdot(-1) \\ \cdot(-2) \\ \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -20 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-\frac{1}{4}) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 13 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(2) \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & 9 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-5) \\ \cdot(-2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(-1) \\ \cdot(-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$h(A) = 4 \overset{\text{NNO}}{=} h(\bar{A}) = 4$ $\quad$ ale zohledě F.V. soustava má řešení

$n = 4$

$h(A) = h(\bar{A}) = n = 4$ máme právě 1 řešení.

4 rovnice matice je vlastně rovnice: $-3 \cdot x_4 = 3$

$\boxed{x_4 = -1}$

3 rovnice matice je rovnice: $-2x_3 + 1 \cdot x_4 = 3$

$-2x_3 - 1 = 3$

$\boxed{x_3 = -2}$

2 rovnice $\quad x_2 + x_3 = -5$

$x_2 - 2 = -5$

$\boxed{x_2 = -3}$

1 rovnice $\quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -5$

$x_1 - 3 - 2 - 1 = -5$

$\boxed{x_1 = 1}$

výsledek $\vec{x} = (1, -3, -2, -1) = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

{ výsledný řešení (pro jakým upravovat matice) zdola nahoru }

příklad

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 8x_3 &= 4 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 8 & 4 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \cdot(-2) \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ \cdot(+) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

$h(A) = 2 \neq h(\bar{A}) = 3$

soustava nemá řešení

další příklady - cvičení

DETERMINANTY

{ cvičení (mimo zápočet) pro STUDENTY MATICE!

determinant matice A (dvojice n) je číslo, které ještě udává pravidla pro výpočet matice!

označení $\det A$, resp. $|A|$

způsob výpočtu determinantu:

- nech $n = 2$, mamo $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

příklad: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 - 3 \cdot 2 = 4 \cdot 6 = -2$

- nech $n = 3$ $\quad$ $\boxed{\text{SARRUSOVO PRAVIDLO}}$

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}$$

příklad:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ 5 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{matrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-2) + 2 \cdot (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 1 \cdot 3 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) \cdot 3 - 2 \cdot 1 \cdot (-2)$$

$$= -4 + 4 + 9 - 6 + 6 + 4 = \underline{5}$$

- nech $n \geq 4$ rozvojem podle prvku celého sloupce

zpravo: subdeterminant (minor) D_{ij} vzniknou na úkor matice A (vyškrtám i-tý prvek a j-tý sloupec)

příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad a_{22} = 5$

$$D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix}$$

$$D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

pokračovaní nabuduce ...