

Relácie a inverzné relácie

Nech X, Y sú ľubovoľné množiny. Binárna relácia R z X do Y je akákoľvek podmnožina kartézskeho súčinu $X \times Y$. Vo vzťahu k relácii $R \subseteq X \times Y$ označujeme X ako **množinu vzorov** a Y ako **množinu obrazov**. **Inverzná relácia** k R je relácia R^{-1} z Y do X

$$R^{-1} = \{(y, x) \in Y \times X : (x, y) \in R\}.$$

- ostrej relácii $R \subseteq X \times Y$ odpovedá funkcia príslušnosti $\mu_R : X \times Y \rightarrow \{0, 1\}$ pričom

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pre } (x, y) \in R, \\ 0 & \text{inak.} \end{cases}$$

- inverzná relácia $R^{-1} \subseteq Y \times X$ má funkciu príslušnosti

$$\mu_{R^{-1}}(y, x) = \mu_R(x, y)$$

Zložená relácia

Nech X, Y, Z sú ľubovoľné množiny. **Zložená relácia** z relácií $R \subseteq X \times Y$ a $S \subseteq Y \times Z$ je relácia $R \circ S$ z X do Z s predpisom

$$R \circ S = \{(x, z) \in X \times Z : (\exists y \in Y : (x, y) \in R, (y, z) \in S)\}.$$

Zložené zobrazenie resp. zložená funkcia

Nech $f : X \rightarrow Y$ a $g : Y \rightarrow Z$ sú ľubovoľné zobrazenia (funkcie). Zobrazenie (funkcia) $f \circ g$ sa nazýva **zloženým zobrazením (funkciou)** resp. **kompozíciou** z X do Z s predpisom $f \circ g(x) = g(f(x))$.

Identické zobrazenie resp. identická funkcia

Nech X je ľubovoľná množina. Zobrazenie (funkcia) $\varphi : X \rightarrow X$ sa nazýva **identickým zobrazením (funkciou)** resp. **identitou** ak

$$\forall x \in X : \varphi(x) = x.$$

Kroneckerova delta

Na množine X relácii rovnosti $E = \{(x, x) : x \in X\}$ odpovedá funkcia príslušnosti

$$\mu_E(x, y) = \sigma(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pre } x = y, \\ 0 & \text{pre } x \neq y. \end{cases}$$

- základnou myšlienkou princípu rozšírenia je umožniť aplikovanie funkcií a operácií na fuzzy množinách

- zobrazenie je binárna relácia $R \subseteq X \times Y$, pre ktorú platí:

pre každý prvok x z X existuje práve jeden prvok

$$y = r(x) \in Y \text{ taký, že } (x, y) \in R$$

- na zobrazenie $r : X \rightarrow Y$ sa tým môžeme pozerať ako na reláciu $R \subseteq X \times Y$ s uvedenou vlastnosťou
- zápis $(x, y) \in R$ je ekvivalentný s $y = r(x)$
- taktiež $R = \{(x, r(x)) : x \in X\}$

Rozšírenie binárnych relácií

Nech $R \subseteq X \times Y$ je ľubovoľná relácia (nemusí byť zobrazenie). Zobrazenie $r : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, ktoré každej množine $A \subseteq X$ priradí množinu $B \subseteq Y$ podľa predpisu

$$r(A) = \{y \in Y : (\exists x \in A : (x, y) \in R)\}$$

nazývame **rozšírením** relácie R . Analogicky zobrazenie $r^{-1} : \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$ definované vzťahom

$$r^{-1}(B) = \{x \in X : (\exists y \in B : (x, y) \in R)\}$$

nazývame **rozšírením** relácie R^{-1} .

- rozšírenia r a r^{-1} nemusia byť vzájomne inverzné, a tým $r \circ r^{-1}$ alebo $r^{-1} \circ r$ nemusí byť identita

Rozšírenie binárnych relácií na fuzzy množiny

Nech $R \subseteq X \times Y$ je ostrá relácia. Zobrazenie $r : \mathcal{F}(X) \rightarrow \mathcal{F}(Y)$, ktoré každej množine $A \in \mathcal{F}(X)$, prvku $y \in Y$ a fuzzy konjunkcii $\wedge$ priradí množinu $B \in \mathcal{F}(Y)$ podľa predpisu

$$\mu_{r(A)}(y) = \sup_{x \in X} \mu_R(x, y) \wedge \mu_A(x)$$

nazývame **rozšírením** relácie R . Analogicky zobrazenie $r^{-1} : \mathcal{F}(Y) \rightarrow \mathcal{F}(X)$ definované vzťahom

$$\mu_{r^{-1}(B)}(x) = \sup_{y \in Y} \mu_R(x, y) \wedge \mu_B(y)$$

nazývame **rozšírením** relácie R^{-1} .

- na voľbe fuzzy konjunkcie $\wedge$ nezáleží v prípade predpokladu ostrej relácie R