

KARTEZIANSKY SUČIN $A \times B = \{(x,y) : x \in A, y \in B\}$

BINÁRNA RELÁCIA $R \subseteq A \times B$

BINÁRNA RELÁCIA NA MNOŽINE A , $R \subseteq A \times A = A^2$

$(x,y) \in R$... prvok x je v relácii s prvkom y

$(x,y) \notin R$... prvok x nie je v relácii R s prvkom y

príklad: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(x,y) \in A \times A : x = a\} = \{(a,a), (a,b), (a,c)\}$

$\bar{R} = \{(b,a), (b,c), (b,b), (c,a), (c,b), (c,c)\}$

$(a,a) \in R \rightarrow aRa$

$(b,a) \notin R \rightarrow a \bar{R} b$

RAVE VEDY
EKVIVALENT

1) typické prvky binárnej relácie $R = \{(x,y) \in A^2 : x = a\}$

2) typické prvky binárnej relácie $R \subseteq A^2 : x R y \Leftrightarrow x = a$

Reprezentácia binárnych relácií:

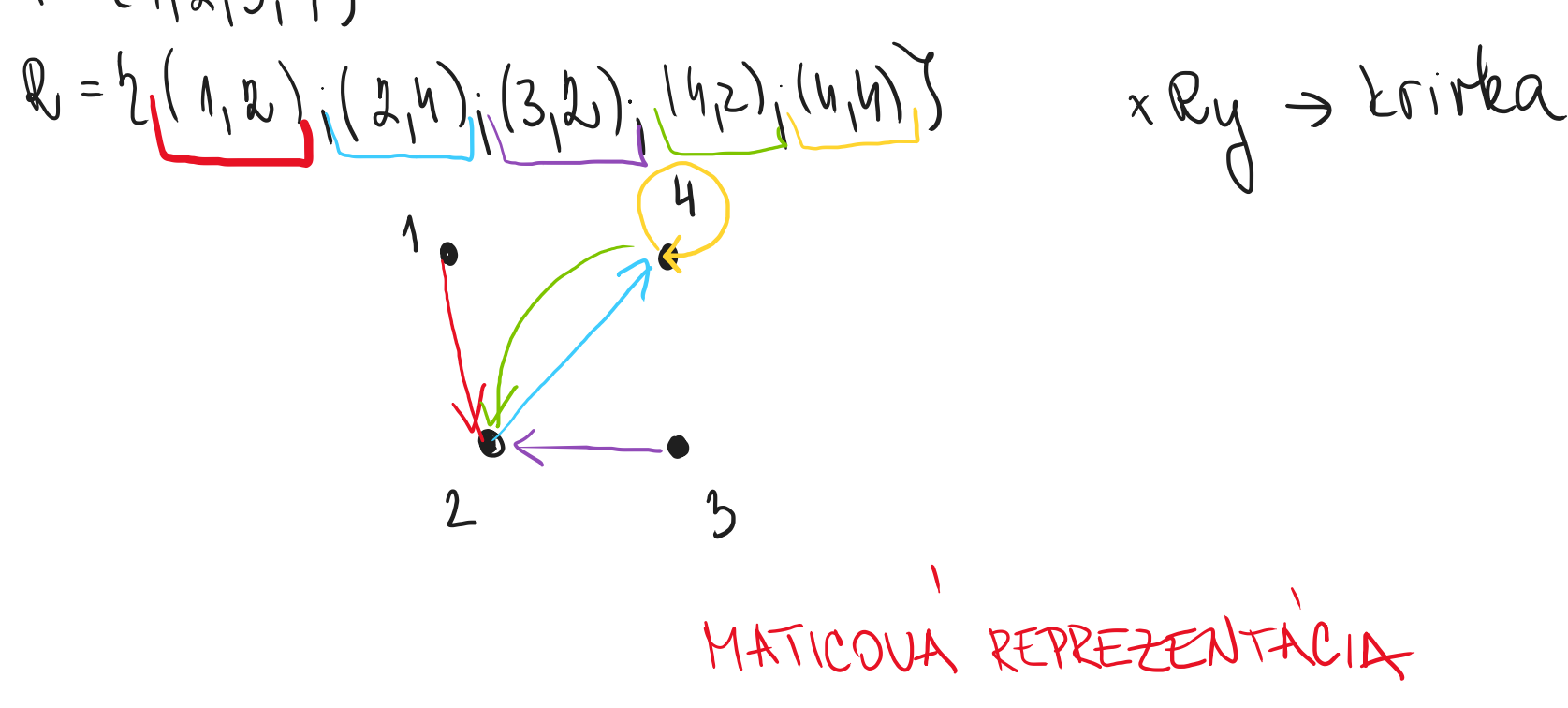
- 1) popisom vlastností
- 2) grafická
- 3) grafová
- 4) maticová

1) Na množine $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $R = \{(1,2), (2,4), (3,2), (4,3), (4,4)\}$

GRAFICKÁ REPREZENTÁCIA



GRAFOVÁ REPREZENTÁCIA:



MATICOVÁ REPREZENTÁCIA

$A R \subseteq A, B$, $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3, \dots, b_m\}$, $|A|=n$, $|B|=m$

MATICA $M_R = (m_{ij})$ typu $m \times n$:

$$m_{ij} = \begin{cases} 1 & a_i R b_j, (a_i, a_j) \in R \\ 0 & a_i \bar{R} b_j, (a_i, a_j) \notin R \end{cases}$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$, $|A|=4$

$R = \{(1,2), (2,4), (3,2), (4,3), (4,4)\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ \downarrow & & & \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

príklad:

$M = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, $R = \{(x,y) \in M \times M : x+y \leq 1\}$

Napíšte maticu M_R a grafickú reprezentáciu R :

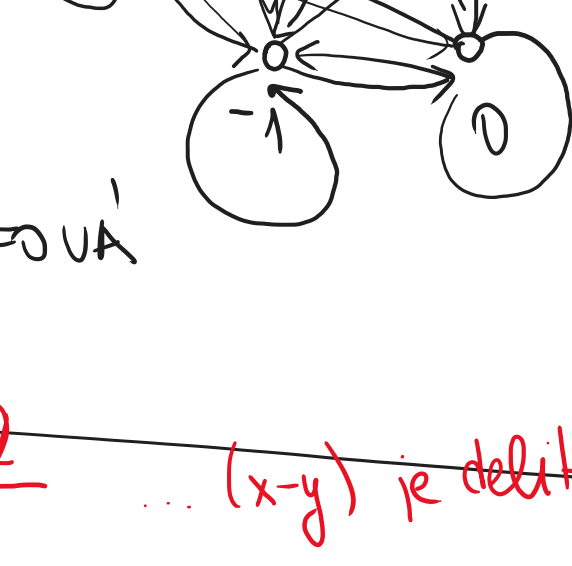
$M \times M = \{(-2,-2), (-2,-1), (-2,0), (-2,1), (-2,2), (-1,-2), (-1,-1), (-1,0), (-1,1), (-1,2), (0,-2), (0,-1), (0,0), (0,1), (0,2), (1,-2), (1,-1), (1,0), (1,1), (1,2), (2,-2), (2,-1), (2,0), (2,1), (2,2)\}$

$R =$

$$M_R = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATICOVÁ

GRAFOVÁ

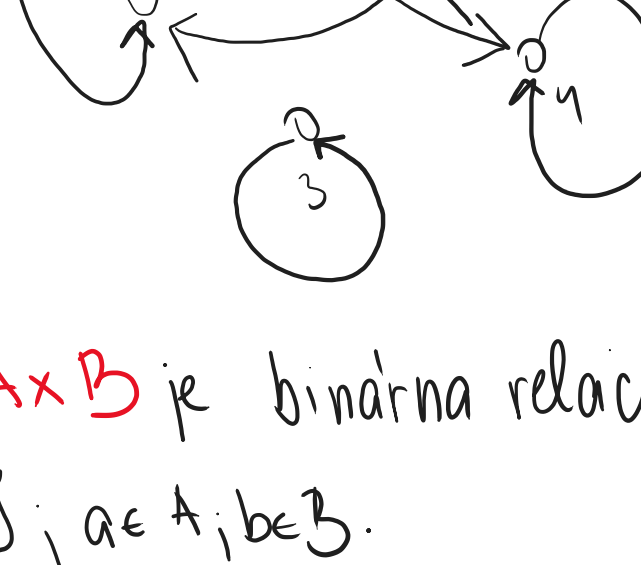


$M = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$R \subseteq M \times M : x R y \Leftrightarrow 3 | (x-y)$

$R = \{(1,1), (1,4), (2,2), (2,5), (3,3), (4,1), (4,4), (5,2), (5,5)\}$

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \downarrow & & & & \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



Inverzná relácia k binárnej relácii $R \subseteq A \times B$ je binárna relácia $R^{-1} \subseteq B \times A$,

prícom $R^{-1} = \{(b,a), (a,b) \in R\}$, $a \in A, b \in B$.

$A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a,a), (a,b), (b,c), (c,a)\}$

$R^{-1} = \{(a,a), (b,a), (c,b), (a,c)\}$

Veľ A, B, C sú množiny. $R \subseteq A \times B$ a $S \subseteq B \times C$. Sučin (zloženie) binárnych relácií R a S :

$R \circ S \subseteq A \times C$ taká, že pre $a \in A, c \in C$ je $(a,c) \in R \circ S$

príklad: keď existuje aspoň 1 $b \in B$: $(a,b) \in R$ a $(b,c) \in S$.

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R_1 = \{(1,1), (1,2), (2,4), (3,4), (4,2)\}$

$R_2 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (4,4)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(1,1), (1,2), (2,4), (3,4), (4,1), (4,2)\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,1), (2,1), (2,2), (4,4)\}$

$R_1 \circ R_2 = \{(a,c), (a,a), (a,b)\} \subseteq \{a,b,c\} \times \{a,b,c\}$

$R_2 \circ R_1 = \{(1,3), (1,1), (1,2), (1,3)\} \subseteq \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}$

VLASTNOSTI BINÁRNYCH RELACIE

Binárna relácia $R \subseteq A^2$ (! NA MNOŽINE!) sa nazýva:

- 1) REFLEXÍVNA: ak pre každé $a \in A$: $a R a$
- 2) SYMETRICKÁ: ak pre každé $a, b \in A$: $a R b \Rightarrow b R a$
- 3) ANTISYMETRICKÁ: ak pre každé $a, b \in A$: $(a R b \wedge b R a) \Rightarrow a = b$
- 4) TRANZITÍVNA: ak pre každé $a, b, c \in A$: $(a R b \wedge b R c) \Rightarrow a R c$

$$\begin{matrix} a R b \Rightarrow b R a & a R b \wedge b R c \\ \downarrow & a R b, \text{ tak } b R a & a R b \wedge a R c \Rightarrow b R c \end{matrix}$$

$$a R b \wedge b R c \Rightarrow a R c$$

príklad: $A = \{a, b, c\}$

$R = \{(a,a), (b,b), (a,b), (b,a), (b,c)\}$

1) JE R REFLEXÍVNA: NIE JE, LEBO $(c,c) \notin R$

KONTRAPRÍKLAD:

2) JE R SYMETRICKÁ: NIE JE, LEBO $(b,c) \in R$ ale $(c,b) \notin R$

$b R c$ ale $c \bar{R} b$.

3) JE R ANTISYMETRICKÁ: NIE JE, LEBO $(a,b), (b,a) \in R$ a $a \neq b$

KONTRAPRÍKLAD

4) JE R TRANZITÍVNA: NIE JE, LEBO $(a,b) \in R$ a $(b,c) \in R$ ale $(a,c) \notin R$

KONTRAPRÍKLAD: $a R b \wedge b R c$ ale $a \bar{R} c$