

PRIEBEH FUNKCIE

1. MONOTONNOST FUNKCIE (znamienko prvej derivácie)

Veta Nech f má deriváciu na J . Ak $\forall x \in J$

- $f'(x) > 0$, tak f je rastúca
- $f'(x) < 0$, tak f je klesajúca
- $f'(x) \geq 0$, tak f je nerastúca
- $f'(x) \leq 0$, tak f je nerastúca
- $f'(x) = 0$, tak f je konst.

Dôkaz map. (b)

predpoklad: f má deriváciu na J i $f'(x) < 0$
 $\forall x \in J$.

$\{ \text{def. klesaj. funkcie na } J : \forall x_1, x_2 \in J; x_1 < x_2$
tak $f(x_1) > f(x_2) \}$

vezmime ľubovoľné $x_1, x_2 \in J$, $x_1 < x_2$, $(x_2 - x_1 > 0)$

Máme interval $\langle x_1, x_2 \rangle$ je klesajú

Plati Lagrangeova veta

$\{ \langle a, b \rangle, f \text{ je spojitá na } \langle a, b \rangle$
 $f \text{ má deriv. (a,b)}$
 $\exists \xi \in (a, b); f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a) \}$

keď $\exists \xi \in (x_1, x_2)$ tak $f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$

keď $f(x_2) - f(x_1) < 0$

$f(x_1) > f(x_2)$

keď f je klesajúca na J .

príklad: Vypočítame monotónnosť danej funkcie.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0$$

$$f'(x) = (x+3)(x-1) = 0$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 1$$

$D(f)$	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+

$f(x)$

rastúca funkcia

klesajúca funkcia

rastúca funkcia

2. LOKÁLNE EXTREMY FUNKCIE

príklad: $f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7$

$f(x) = f(x_1)$ pre $x \in O(x_1)$

lok. MAX. $f(x_2)$

lok. MIN. $f(x_3)$

lok. MIN. $f(x_4)$

$$f'(x_1) = 0$$

$$f'(x_2) = 0$$

? derivácia v bode x_3 ?

neexistuje v bode x_4 ?

$f'(x_4)$ neexistuje

Def. lok. max. v bode x_0 , ak $\exists O^o(x_0)$ i $\forall x \in O^o(x_0); f(x) \leq f(x_0)$ ($f(x) < f(x_0)$)

lok. min. v bode x_0 , ak $\exists O^o(x_0)$, $\forall x \in O^o(x_0); f(x) \geq f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$)

OSTRE, LOK. MAX.

OSTRE, LOK. MIN

! funkcia môže mať extrém len tam, kde

je prvá derivácia nulová, alebo kde prvá

derivácia neexistuje

VETA Nech existuje $f'(x_0)$. Ak funkcia f má v bode x_0 lok. extrém, tak $f'(x_0) = 0$. (dôkaz už bol)

! nulová podmienka existencie lok. extrému!

pozor: bod x_0 je klesajúci platí $f'(x_0) = 0$

sa nazýva STACIONÁRNY BOD.

POSTAČUJÚCE PODMIENKY pre existenciu lok. extrém

1) Ak f' mení znamienko z + na -, tak f má

v bode x_0 lok. MAXIMUM

$\{ f'(x) > 0$ na ľavom okolí x_0

$f'(x) < 0$ na pravom okolí x_0

b) Ak f' mení znamienko z - na +, tak

f má v bode x_0 lok. MINIMUM

$f' < 0$ $f' > 0$

LOK. MIN.

2) Nech x_0 je SB. ($f'(x_0) = 0$)

a) ak $f''(x_0) > 0$, tak f má v bode x_0 lok. MIN

b) ak $f''(x_0) < 0$, tak f má v bode x_0 lok. MAX.

dôkaz: map. (b) $f''(x_0) < 0, f'(x_0) = 0$

x_0 je SB

podľa def. $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} < 0$

$(f'(x_0))'$

ak $x < x_0$

$x - x_0 < 0$

$f'(x) < 0$

$x - x_0 < 0$

$f(x) > 0$

rastú

ak $x > x_0$

$x - x_0 > 0$

$f'(x) < 0$

$x - x_0 > 0$

$f(x) < 0$

klesá

za predpokladu $f''(x_0) < 0$

LOK. MAX

príklad: Najdeme lok. extrém danej funkcie.

$$f(x) = \frac{x^3}{3} + x^2 - 3x + 7, \quad D(f) = \mathbb{R}$$

ak má funkcia lok. extrém, tak len v SB

(prípadne tam, kde f' neexistuje NIE JE MŔTVA PRÍPAD)

1. hľadám SB

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3$$

$$f'(x) = x^2 + 2x - 3 = 0 = (x+3)(x-1)$$

$$x_1 = -3$$

$$x_2 = 1$$

stacionárne body

funkcia môže mať extrém iba v týchto

využijem už vypočítanú monotónnosť funkcie (z predch. príkladu)

$D(f)$	$(-\infty, -3)$	$(-3, 1)$	$(1, \infty)$
$f'(x)$	+	-	+
$f(x)$		lok. MAX	lok. MIN

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad

príklad