KONVEXNOST, KONKÁVNOST FUNKCE
(výpočet, souvislost s derivací)

Def Konvexní funkce na intervalu I, je

tětiva bod $[x_1, f(x_1)]$ leží pod grafem, nebo tětiva bod $[x_2, f(x_2)]$ (případně dotýkají grafu)

$x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$

$x_1 < x < x_2$

(ať vyndám z definiční oblasti, že bod $[x, f(x)]$ leží na grafu ... leží tětiva o EXTREMÁLNÍCH FUNKCÍCH)

příklad: $f: y = 2x^2+1$

$f'(x) = 4x$

$f''(x) = 4 > 0 \quad \forall x \in D(f)$

Def Konkávní funkce na intervalu I, je

tětiva $x_1, x_2 \in I$: $x_1 < x < x_2$ leží pod grafem, nebo bod $[x, f(x)]$ (nebo bod $[x, f(x)]$) ležící nad grafem

$x_1 < x < x_2$

(ať mluvím z definiční oblasti, nebo z extrémních funkcí)

příklad: $f: y = -2x^2$

$f'(x) = -4x$

$f''(x) = -4 < 0 \quad \forall x \in D(f)$

VĚTA Mějme druhou derivaci na I.

ať $\forall x \in I$

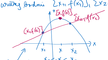
a) $f''(x) > 0$, ať f je na I — rýdyzkonvexní

b) $f''(x) < 0$, ať f je na I — rýdyzkonkávní

c) $f''(x) \geq 0$, —"— konvexní

d) $f''(x) \leq 0$, —"— konkávní

malá debata – konkávní B



$f''(x) < 0$

$f'' = 0$

ale co mění f''?

$\oplus$ OA mění ker

f'' ... f' ... funkce

$f'' < 0$

$f' < 0$

příklad URČETE INTERVALY konvexnosti a konkávnosti funkce (výpočet)

$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$

$D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\} = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$

$f'(x) = \frac{1(x^2-1) - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}$

$f''(x) = \frac{-2x(x^2-1) - (-x^2-1) \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} =$

(kvo) $= \frac{-2x^3+2x+4x^3+4x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

potřebuji $f'' > 0$, $f'' < 0$ najít extrém, tedy $f'' = 0$

$f''(x) = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$

$2x(x^2+3) = 0$

$2x = 0$ nebo $x^2+3 \neq 0$

$x = 0$

nulový bod f''

definiční obor f'' (ne f)

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	IB	$\cap$	$\cup$
	konkávní	konvexní	[0,0]		

na konvexní a konkávní je f definovaná, proto tvoříme obrázek $\cap$, bodu $x = 0$ bude IB

INFLEXNÍ BOD funkce (bod obratu)

Def – pravidlo

bod, kde se mění konvexnost na konkávnost, nebo naopak

$f(x) = x^3$

konkávní

bod $[0,0]$ $x = 0$ má $f''(x) = 0$ inflexní

$\Downarrow$

y = tečný bod (IB)

$f(x) = \sin x$

konkávní

$x = \pi$

$x = 2\pi$

konvexní

Zdá se, že druhá derivace = IB?

VĚTA Buď nutný $f''(x_0)$. Ať bod x_0 je IB, pak platí:

bod $f''(x_0) = 0$.

Nutná podmínka existence IB!

pro funkci třeba mít IB, ale ne, že $f''(x) = 0$.

POSTAČUJÍCÍ PODMÍNKY existence IB

1. Buď $f''(x_0) = 0$, ale x_0 bod, že se mění konvexnost/konkávnost, tedy bod x_0 je IB funkce

2. Buď $f''(x_0) = 0$ a $f'''(x_0) \neq 0$, tedy x_0 je IB funkce

PRŮBĚH FUNKCE – příklady

1. $D(f)$
2. Sudost, lichost – bysnyjek bodovek $D(f)$
3. asymptoty
4. Pole funkce
5. monotónnost

0. bod průsečíku
1. Konvexnost/konkávnost
2. IB
3. Graf funkce

příklad vyšetřete průběh funkce $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

1. $D(f) = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

2. Sudost ne $f(-x) = \frac{-x^3}{x^2-1} = -f(x)$

$\lim_{x \to -\infty} \frac{x^3}{x^2-1} = -\infty$

$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$ (1)

$\lim_{x \to -1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{-1}{0^-} = \infty$

$\lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^2-1} = \infty$

$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^-} = -\infty$ (2)

$\lim_{x \to 1^+} \frac{x^3}{x^2-1} = \frac{1}{0^+} = \infty$ (2)

3. ASYMPTOTY

ASS: $x = -1$, $x = 1$ ANO, svislé v bodech 1

ASS: pro $x \to \infty$: $y = kx + q$

$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x(x^2-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^3}{x^3-x} = 1$

$q = \lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{x^3}{x^2-1} - 1 \cdot x\right) =$

$= \lim_{x \to \infty} \frac{x^3 - x^3 + x}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2-1} = 0$

$q = 0$ ASS pro $x \to \infty$

q pro $x \to -\infty$ (nejprve je nevyšetřil)

4. Sudost? $f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$x \in D(f)$ $\forall x \in D(f)$ $-x \in D(f)$ → ANO

problém $f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2-1} = \frac{-x^3}{x^2-1}$

$-f(x) = -\frac{x^3}{x^2-1}$

? $f(x) = f(-x)$? → NE

? $f(-x) = -f(x)$? → ANO

NETRAPNÁ

(kvo grafu je souměrný podle $[0,0]$)

5. monotónnost – tak zderivuj

$f'(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$

$f'(x) = \frac{3x^2(x^2-1) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{3x^2-3x^2-2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(-2x)}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2} = 0$

najdeme nulové body f' i bodu SB

$x^2(x^2-3) = 0$

$x^2 = 0$ SB, $x^2 - 3 = 0$, $x^2 = 3$, $x_2 = -\sqrt{3}$, $x_3 = \sqrt{3}$ SB

tabulka monotónnosti a bod extrému

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	bod max $[-\sqrt{3}, -\frac{3\sqrt{3}}{2}]$	$\searrow$	$\searrow$		$\searrow$	$\searrow$	bod min $[\sqrt{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$	$\nearrow$

7. Konvexnost/konkávnost – IB

$f''(x) = \frac{x^3 \cdot 3x^2}{(x^2-1)^3}$

$f''(x) = \frac{(x^2-1)^3 \cdot 3x^2 - x^3 \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^6} = \frac{3x^2(x^2-1) - 4x^4 + 4x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{-x^4+7x^2}{(x^2-1)^3}$

$= \frac{2x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$

nalezneme nulové body (nutná IB)

$\frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3} = 0$

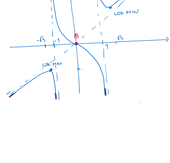
$2x(x^2+3) = 0$

$x = 0$ nebo $x^2+3 \neq 0$

tabulka konvexnosti/konkávnosti + IB

	$(-\infty,-1)$	$(-1,0)$	0	$(0,1)$	$(1,\infty)$
$f''(x)$	$-$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$\cap$	$\cup$	IB [0,0]	$\cap$	$\cup$

graf funkce



pro $2P \in 2$

den (čas) – prezentace

KONIEC

$\bar{t}$ 5 mun