POSTUPNOSTI reálnych čísel (napr. FIBONACCIHO POST., ARITMETICKÁ, GEOMETR., ...)

↓

def. Funkciu $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ nazývame postup. reálnych čísel.

$D(f) = \mathbb{N}$

$1 \longrightarrow f(1)$

$2 \longrightarrow f(2)$

$3 \longrightarrow f(3)$

$4 \longrightarrow f(4)$

$\vdots$

$n \longrightarrow f(n)$

$\vdots$

označenie: $f(1) = a_1$

$f(2) = a_2$

$\vdots$

$f(n) = \boxed{a_n}$ ↓ n-tý člen postupnosti

označenie zadanie: $\boxed{\{a_n\}_{n=1}^{\infty}}$

vlastnosti (z terminológie funkcií) vieme previesť na postupnosti.

$\boxed{\text{napr.}}$ MONOTÓNNOSŤ, OHRANIČENOSŤ POSTUPOSTI

↓ postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je klesajúca, ak $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}}$ $a_n > a_{n+1}$.

$\boxed{\text{príklady}}$ ARITMETICKÁ POSTUPNOSŤ

$a_1 = 2$

$a_2 = 4 = a_1 + 2$

$a_3 = 6 = a_2 + 2$

$a_4 = 8 = a_3 + 2$

$a_{n+1} = a_n + d$

↓ diferencia

$a_n = a_1 + (n-1).d$

GEOMETRICKÁ POSTUPNOSŤ

$a_1 = 3$

$a_2 = 9 = 3.3$

$a_3 = 27 = 9.3$

$\boxed{a_4} = 81 = 27.3 =$

$= 3.3^3$

$\vdots$

kvocient

$a_{n+1} = a_n . \textcircled{q}$

$$\boxed{a_n = a_1 . q^{n-1}}$$

FIBONACCIHO POSTUPNOSŤ:

$a_1 = 1$

$a_2 = 1$

$a_3 = 2$

$a_4 = 3$

$a_5 = 5$

$a_6 = 8$

$a_7 = 13$

↓ veľmi známa (objavuje sa v prírode)

← počet okvetných lístkov je číslo FP.

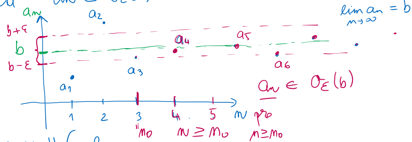
LIMITA POSTUPNOSTI

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} a_n = b}$$

def.

Číslo b nazývame limitou postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ práve vtedy, ak $\forall O_\varepsilon(b)\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ také, že $\forall n \in \mathbb{N};\ n \geq n_0$ platí $a_n \in O_\varepsilon(b)$.

$b \in \mathbb{R}$



počítanie limít (ako pri funkciách pre $x \to \infty$).

príklad:

$$\lim_{n\to\infty} \boxed{\frac{2n^2 - 4n + 8}{7n^2 - 5}} = \frac{2}{7}$$

príklad:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

(Eulerova konštanta)

$e = 2{,}7182\ldots$

príklad: Ideme šetriť (BANKA)

↓ ponúka $\boxed{100\%\ \text{úrok}}$

náš začiatočný $\boxed{\text{vklad}}$ $\boxed{1€}$

úročenie 1x ročne

začiatok — koniec (1 rok)

1€ — $1+1 = \boxed{2€}$

úročenie 2x ročne

zač. — 50% — 50% koniec

1€

$1 + \frac{1}{2}\cdot 1 = \textcircled{1 + \frac{1}{2}}$

$\left(1+\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) =$

$= \left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right) =$

$= \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 \doteq 2{,}25$

úročenie 3x ročne

zač. $\frac{1}{3}\cdot 100\%$ $\frac{1}{3}\cdot 100\%$ $\frac{1}{3}\cdot 100\%$ koniec

1€ $\quad 1+\frac{1}{3} \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right) \quad \left(1+\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}\left(1+\frac{1}{3}\right)^2=$

$=\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)= \quad =\left(1+\frac{1}{3}\right)^2\left(1+\frac{1}{3}\right)=$

$=\boxed{\left(1+\frac{1}{3}\right)^2} \quad =\left(1+\frac{1}{3}\right)^3 \doteq 2{,}37$

⋮

úročenie n x do roka

na konci máme $\boxed{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$

SPOJITÉ ÚROKOVANIE $\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e}$

SÚSTAVY LINEÁRNYCH ROVNÍC

MATICE

Def Maticou typu $m\times n$ nazývame sústava prvkov (čísel) zapísaných do tabuľky s m riadkami a n stĺpcami ($m\in\mathbb{N}$) ($n\in\mathbb{N}$)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix}$$

(označenie matíc veľké písmená)

a_{ij} ... prvky matice

i ... index riadku

j ... index stĺpca

$i=1,\dots,m$

$j=1,\dots,n$

skrátene $A=(a_{ij})$

základné vlastnosti matíc:

- submatica (podmatica) matice A.

  pr. $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$

  typu 3×3

  B je submatica matice A

- pr. A je štvorcová matica 3. stupňa

  B je —||— 2. stupňa

- riadkový vektor je matica typu $1\times n$

  len 1 riadok

  pr. $\vec{a}=(1,4,-1,5)$

- stĺpcový vektor je matica typu $m\times 1$

  pr. $\vec{b}=\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 8 \\ -3 \end{pmatrix}$

- lineárna kombinácia vektorov

Nech $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$ sú vektory, $k_1, \dots, k_n$ sú konštanty. Potom vektor

$$k_1.\vec{a}_1 + k_2.\vec{a}_2 + \dots + k_n.\vec{a}_n$$

nazývame lineárnou kombináciou vektorov $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$.

príklad:

$$\vec{a}_1 = (1, 2, 3)$$
$$\vec{a}_2 = (3, -2, 4)$$
$$\vec{a}_3 = (-1, 2, 0)$$

vezmem napr.

$$\textcircled{3}.\vec{a}_1 + \textcircled{2}\vec{a}_2 \textcircled{-4}\vec{a}_3 =$$

$$= 3.(1,2,3) + 2(3,-2,4) - 4(-1,2,0)$$

$$= (3,6,9) + (6,-4,8) + (4,-8,0) =$$

$$= \underbrace{(13,-6,17)}_{\text{je LK vektorov } \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3}$$

- jednotková matica: (1 na hlavnej diagonále, 0 všade inde)
  ↓ je štvorcová

pr.

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \longrightarrow \text{hlavná diagonála}$$

- symetrická matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \overset{a_{12}}{\boxed{0}} & \boxed{-4} \\ a_{21}\,\boxed{0} & 2 & \boxed{5} \\ \underset{a_{31}}{\boxed{-4}} & \underset{a_{32}}{\boxed{5}} & 3 \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \end{matrix}$$

$$\boxed{a_{ij} = a_{ji}}$$

- transponovaná matica k matici $A = (a_{ij})$
  označ. $A^T = (a_{ji})$
  ↓
  „vymením riadky a stĺpce"

pr.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 0 & 1 & 8 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \\ 3 & 1 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

↓ typu 2x4

↓ typu 4x2

- HORNÁ TROJUHOLNÍKOVÁ MATICA
  (štvorcová matica s nulami pod hlavnou diagonálou)

pr.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 23 & 4 \\ 0 & -2 & 158 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- LICHOBEŽNÍKOVÁ MATICA – matica, v ktorej pod každým vedúcim prvkom v riadku (prvý nenulový) sú nuly.

pr.

$$A = \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 3 & 5 & -1 \\ 0 & \textcircled{4} & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \textcircled{-6} \end{pmatrix}$$

OPERÁCIE S MATICAMI

① SÚČET MATÍC:

Nech sú dané matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times n$

$B = (b_{ij})$ typu $m \times n$.

Súčtom matíc

$$A + B = C = (c_{ij})$$

$$\boxed{c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.}$$

$i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, n$

→ sčítam prvky na rovnakých miestach.

príklad:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$A + B$ nedá sa neexistuje

$$C = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$A + C$ sa dá vypočítať

$$= \begin{pmatrix} \overset{a_{11}}{\boxed{1}} & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \overset{c_{11}}{\boxed{-1}} & 3 \\ 4 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & 2+3 \\ 3+4 & 4+8 \\ 5+0 & 6+2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 12 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

② NÁSOBENIE MATICE KONŠTANTOU

k-násobkom matice $A = (a_{ij})$ nazývame maticu $C = (c_{ij})$, kde $c_{ij} = k . a_{ij}$ (konštantou vynásobíme každý prvok pôvodnej matice)

$A = (a_{ij})$ typu $m \times n$, tak $(k . A)$ typu $m \times n$.

pr.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad ; \quad k = 2$$

$$k . A = 2 . \begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 & 0 \\ 4 & 5 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2.1 & 2.2 & 2.8 & 2.0 \\ 2.4 & 2.5 & 2.(-1) & 2.2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 4 & 16 & 0 \\ 8 & 10 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

③ SÚČIN MATÍC

Nech sú dané matice $A = (a_{ij})$ typu $m \times r$

$B = (b_{ij})$ typu $r \times n$.

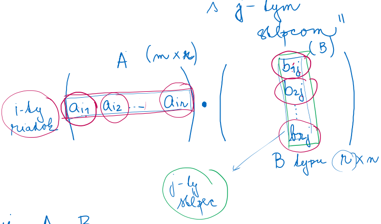
Súčinom matíc $A . B$ nazývame maticu $C = (c_{ij})$ typu $m \times n$

kde $\boxed{c_{ij} = a_{i1} . b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \dots + a_{ir} . b_{rj}}$

pre $i = 1, \dots, m$

$j = 1, \dots, n$.

→ násobím i-ty riadok (A)



stručne: násobenie A . B

- počet stĺpcov 1. matice = počet riadkov 2. matice !
- „násobím riadok · stĺpec" → viď príklad
- výsledná matica je typu: počet riadkov A × počet stĺpcov B.

príklad

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

2×3 $\qquad$ 3×3

? vieme A . B ? → ÁNO

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overset{1-2+12}{1.1+2.(-1)+4.3} & \overset{1+8}{1.1+2.0+4.2} & \overset{4+6+8}{1.4+2.3+4.2} \\ \underset{-2-1+9}{-2.1+1.(-1)+3.3} & \underset{-2+6}{-2.1+1.0+3.2} & \underset{-8+3+6}{-2.4+1.3+3.2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 11 & 9 & 18 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

matica typu 2×3