

Matematika I.

Boolovske funkcie

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Elementárna konjunkcia a elementárna disjunkcia

Nech p je výroková premenná a $c \in \{0, 1\}$. Potom

$$p^c = \begin{cases} p, & \text{ak } c = 1, \\ \bar{p}, & \text{ak } c = 0. \end{cases}$$

Definícia

Nech $p_1, p_2, \dots, p_n$ sú výrokové premenné. **Elementárna konjunkcia** je formula, ktorá má tvar:

$$p_1^{c_1} \wedge p_2^{c_2} \wedge \dots \wedge p_n^{c_n}$$

a **elementárna disjunkcia** je formula, ktorá má tvar:

$$p_1^{c_1} \vee p_2^{c_2} \vee \dots \vee p_n^{c_n}.$$

Normálny konjunktívny a normálny disjunktívny tvar

Definícia

Hovoríme, že formula je v **disjunktívnom tvare** práve vtedy, keď je disjunkciou elementárnych konjunkcií. Hovoríme, že formula je v **konjunktívnom tvare** práve vtedy, keď je konjunkciou elementárnych disjunkcií.

Definícia

Hovoríme, že formula α má **disjunktívny normálny tvar (DNT)** a formula β má **konjunktívny normálny tvar (KNT)** práve vtedy, keď α je v normálnom disjunktívnom (resp. β je v konjunktívnom normálnom tvare) tvare a každá elementárna konjunkcia v α (resp. elementárna disjunkcia v β) obsahuje všetky výrokové premenné danej formuly.

Definícia

Boolovská algebra je algebraický systém $\mathcal{B} = (L, \vee, \wedge, ', O, I)$, pričom pre ľubovoľné $x, y, z \in L$ platí:

1 $x \vee y = y \vee x;$

2 $x \wedge y = y \wedge x;$

3 $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z;$

4 $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z;$

5 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z);$

6 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$

7 $x \vee O = x;$

8 $x \wedge x' = O;$

9 $x \vee x' = I;$

10 $x \wedge I = x.$

Veta

Nech $\mathcal{B}$ je boolovská algebra. Potom pre ľubovoľné $x, y, z \in L$ platí:

$$\textcircled{1} \quad x \vee x = x \wedge x = x;$$

$$\textcircled{2} \quad x \wedge 0 = 0;$$

$$\textcircled{3} \quad x \vee 1 = 1;$$

$$\textcircled{4} \quad (x')' = x;$$

$$\textcircled{5} \quad (x \vee y)' = x' \wedge y';$$

$$\textcircled{6} \quad (x \wedge y)' = x' \vee y';$$

$$\textcircled{7} \quad x \vee (x \wedge y) = x \wedge (x \vee y) = x;$$

$$\textcircled{8} \quad x \vee (x \wedge y) = x \vee y;$$

$$\textcircled{9} \quad x \wedge (x \vee y) = x \wedge y;$$

$$\textcircled{10} \quad x \vee y = 0 \Leftrightarrow x = y = 0;$$

$$\textcircled{11} \quad x \wedge y = 1 \Leftrightarrow x = y = 1;$$

$$\begin{aligned} \textcircled{12} \quad x = y &\Leftrightarrow \\ &(x \wedge y') \vee (x' \wedge y) = 0 \Leftrightarrow \\ &(x \vee y') \wedge (x' \vee y) = 1. \end{aligned}$$

Definícia

Nech $D = \{0, 1\}$. Funkciu $f : D^n \rightarrow D$ nazývame **boolovská funkcia n premenných**.

Každá boolovská funkcia priradí n -tici núl a jednotiek hodnotu nula alebo jedna. Existuje 16 rôznych boolovských funkcií dvoch premenných:

x	y	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9	f_{10}	f_{11}	f_{12}	f_{13}	f_{14}	f_{15}	f_{16}
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	1
0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	0	0	1	0	0	0	1	1	1	0	0	1	0	1

Jednotlivé funkcie môžeme zapísať takto:

$$\begin{array}{llll} f_1 = x & f_5 = x \wedge y & f_9 = x \vee y & f_{13} = x \wedge x' \\ f_2 = y & f_6 = x \wedge y' & f_{10} = x \vee y' & f_{14} = x \vee x' \\ f_3 = x' & f_7 = x' \wedge y & f_{11} = x' \vee y & f_{15} = (x \wedge y') \vee (x' \wedge y) \\ f_4 = y' & f_8 = x' \wedge y' & f_{12} = x' \vee y' & f_{16} = (x \wedge y) \vee (x' \wedge y') \end{array}$$

Definícia

Nech f, g sú boolovské funkcie. Potom

- **Spojenie** boolovských funkcií f a g je funkcia $(f \vee g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \vee g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- **Priesek** boolovských funkcií f a g je funkcia $(f \wedge g)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge g(x_1, x_2, \dots, x_n)$.
- **Komplement** k boolovskej funkcii f je funkcia $f'(x_1, x_2, \dots, x_n) = (f(x_1, x_2, \dots, x_n))'$.

Definícia

Hovoríme, že boolovské funkcie n premenných f a g sa **rovnajú**, keď $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n)$ pre každé $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D^n$.

Realizácia boolovskej funkcie

Každej formule $\alpha(p_1, p_2, \dots, p_n)$ výrokovej logiky prislúcha tabuľka pravdivostných hodnôt. Tá istá tabuľka hodnôt jednoznačne určuje aj boolovskú funkciu n premenných. Označujeme ju f_α a nazývame ju **pravdivostnou funkciou formuly α** .

Definícia

Formula α **realizuje boolovskú funkciu f** práve vtedy, ak $f = f_\alpha$.

Realizácia boolovskej funkcie

Definícia

Hovoríme, že formula φ , obsahujúca k premenných $p_1, p_2, \dots, p_k$, **je realizáciou boolovskej funkcie f** k premenných, keď pre každé ohodnotenie u výrokových premenných platí $u(\varphi) = f(u(p_1), u(p_2), \dots, u(p_k))$.

Je zrejmé, že dve formuly sú (sémanticky) ekvivalentné práve vtedy, keď sú realizáciou tej istej boolovskej funkcie.

Veta

- Ku každej boolovskej funkcii existuje formula, ktorá ju realizuje.
- Každú nenulovú boolovskú funkciu možno realizovať formulou α v úplnom disjunktívnom normálnom tvare.
- Každú boolovskú funkciu, ktorá nie je identicky rovná 1, možno realizovať formulou β v úplnom konjunktívnom normálnom tvare.

Príklad

Nájdite formulu α v DNT a formulu β v KNT, ktoré sú realizáciou boolovskej funkcie troch premenných $f(x, y, z)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 v bodoch: $(0, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 1), (1, 0, 0)$.

Riešenie.

x	y	z	$f(x, y, z)$	elem. konjunkcia	elem. disjunkcia
0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	
0	0	1	0		$x \vee y \vee \bar{z}$
0	1	0	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$	
0	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
1	0	0	0		$\bar{x} \vee y \vee z$
1	0	1	0		$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1	1	0	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

Riešenie.

x	y	z	$f(x, y, z)$	elem. konjunkcia	elem. disjunkcia
0	0	0	1	$\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}$	
0	0	1	0		$x \vee y \vee \bar{z}$
0	1	0	1	$\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}$	
0	1	1	1	$\bar{x} \wedge y \wedge z$	
1	0	0	0		$\bar{x} \vee y \vee z$
1	0	1	0		$\bar{x} \vee y \vee \bar{z}$
1	1	0	0		$\bar{x} \vee \bar{y} \vee z$
1	1	1	1	$x \wedge y \wedge z$	

$$\alpha: (\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) - \text{DNT}$$

$$\beta: (x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) - \text{KNT}$$

Minimalizácia DNT a KNT

Príklad

Minimalizujte formuly z predchádzajúceho príkladu.

Riešenie využitím známych tautológií:

$$(\bar{x} \wedge \bar{y} \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge \bar{z}) \vee (\bar{x} \wedge y \wedge z) \vee (x \wedge y \wedge z) \models \\ \models [(\bar{x} \wedge \bar{z}) \wedge (\bar{y} \vee y)] \vee [(y \wedge z) \wedge (\bar{x} \vee x)] \models (\bar{x} \wedge \bar{z}) \vee (y \wedge z) -$$

MDT

$$(x \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee y \vee z) \wedge (\bar{x} \vee y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee \bar{y} \vee z) \models \\ \models [(y \vee \bar{z}) \vee (x \wedge \bar{x})] \wedge [(\bar{x} \vee z) \vee (z \wedge \bar{z})] \models (y \vee \bar{z}) \wedge (\bar{x} \vee z) -$$

MKT

Riešenie pomocou **Karnaughovej mapy**:

	$y \quad z$			
	000	010	011	001
x	1	1	1	0
	0	0	1	0
	100	110	111	101

	$y \quad z$			
	00	01	11	10
x	1	1	1	0
	0	0	1	0

Príklad

Nájďme minimálny disjunktívny tvar a minimálny konjunktívny tvar boolovskej funkcie štyroch premenných $f(p, q, r, s)$, ktorá nadobúda hodnotu 0 iba v argumentoch 0010, 1000, 1010, 1001, 1100, 1101, 1011.

		rs			
		00	10	11	01
pq	00	1	0	1	1
	10	0	0	0	0
	11	0	1	1	0
	01	1	1	1	1

		rs			
		00	10	11	01
pq	00	1	0	1	1
	10	0	0	0	0
	11	0	1	1	0
	01	1	1	1	1

Minimálny konjunktívny tvar je $(\bar{p} \vee q) \wedge (q \vee \bar{r} \vee s) \wedge (\bar{p} \vee r)$.

Minimálny disjunktívny tvar je $(\bar{p} \wedge \bar{r}) \vee (q \wedge r) \vee (\bar{p} \wedge s)$.