

Matematika I. Výroková logika

Technická univerzita v Košiciach



2025–2026

Výrok - gramatická veta, ktorá je pravdivá, alebo nepravdivá. O jej pravdivosti vieme **jednoznačne!** rozhodnúť. Výrok musí byť oznamovacia veta.

- Ak je výrok pravdivý, priradíme mu pravdivostnú hodnotu 1.
- Ak je výrok nepravdivý, priradíme mu pravdivostnú hodnotu 0.

Príklad

Určte, či nasledujúce vety sú výrokom.

Dnes je pondelok. *áno*

Aký je dnes deň? *nie*

FEI TU Košice *nie*

Musím ísť do školy. *áno*

Určite chod' do školy. *nie*

Jednoduchý (elementárny) výrok je tvrdenie, ktorého žiadna časť nie je výrokom.

Zložený výrok má vlastné časti, ktoré sú výrokom. Vzniká z jednoduchých výrokov použitím logických spojok.

Nech A, B sú výroky:

- 1 **Negácia:** $\neg A, \overline{A}, A'$ (Čítame: Nie je pravda, že A .)
Negovaný výrok nadobúda opačnú pravdivostnú hodnotu, ako výrok pôvodný.
- 2 **Konjunkcia:** $A \wedge B$ (Čítame: A a B .)
- 3 **Disjunkcia:** $A \vee B$ (Čítame: A , alebo B .)
- 4 **Implikácia:** $A \Rightarrow B$ (Čítame: Ak A , tak B . resp. Keď A , potom B .)
- 5 **Ekvivalencia:** $A \Leftrightarrow B$ (Čítame: A práve vtedy, keď B . resp. A vtedy a len vtedy, keď B .)

- 1 **Existenční kvantifikátor:** $\exists$ - Čítame: existuje.
- 2 **Všeobecný kvantifikátor:** $\forall$ - Čítame: pre všetky, resp. pre každý.

- Disjunkciu v matematike považujeme za pravdivú, ak je aspoň jeden z elementárnych výrokov pravdivý.
- Implikáciu v matematike chápeme doslova. To znamená, že sa jedná o výrok pravdivý v prípade, ak:
 - platia oba elementárne výroky súčasne, alebo
 - ak prvý výrok neplatí. V tomto prípade hovoríme, že implikácia platí triviálne.

Nech A, B sú výroky, potom $A \Rightarrow B$ čítame:

- A implikuje B , alebo
- B vyplýva z A , alebo
- A je postačujúca podmienka pre výrok B , alebo
- B je nutná podmienka pre A .

Nech $A \Rightarrow B$ je veta **všeobecná**, potom:

- $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ nazývame veta **obmenená**.
- $B \Rightarrow A$ nazývame veta **obrátena**.
- $A \wedge \bar{B}$ nazývame **negácia** vety.

Veta všeobecná a veta obmenená nadobúdajú rovnaké pravdivostné hodnoty.

Definícia

Abeceda výrokovkej logiky je množina pozostávajúca zo symbolov pre

- a) **výrokové premenné**: $p, q, r, \dots$, o ktorých predpokladáme, že ich máme k dispozícii nekonečne veľa,
- b) **logické spojky**: negácia, $\wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow$,
- c) **pomocné symboly** – zátvorky.

L'ubovoľnú postupnosť prvkov abecedy výrokovkej logiky nazývame slovo nad abecedou výrokovkej logiky.

Formula výrokovej logiky

Definícia

Postupnosť slov $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ nazývame **vytvárajúca postupnosť formuly**, ak pre ľubovoľné $i \leq n$ je splnená práve jedna z týchto podmienok:

- a) α_i je **výroková premenná**,
- b) α_i je **negácia niektorého z prvkov** $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{i-1}$,
- c) α_i je **tvaru** $(\alpha_j \wedge \alpha_k), (\alpha_j \vee \alpha_k), (\alpha_j \Rightarrow \alpha_k), (\alpha_j \Leftrightarrow \alpha_k)$ **pre nejaké** $j, k < i$.

Definícia

Slovo α nad abecedou výrokovej logiky sa nazýva **formula výrokovej logiky** práve vtedy, keď existuje taká vytvárajúca postupnosť formuly, že jej posledným členom je α . Postupnosť slov $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n = \alpha$ nazývame **vytvárajúca postupnosť formuly** α .

Definícia

Podformulou formuly α nazývame formulu výrokovej logiky, ktorá sa vyskytuje vo všetkých vytvárajúcich postupnostiach formuly α .

Príklad

Napíšte vytvárajúcu postupnosť formuly

$$(p \vee r) \Leftrightarrow ((q \Rightarrow \bar{p}) \wedge r).$$

Riešenie. Vytvárajúca postupnosť je:

$p, r, q, \bar{p}, p \vee r, q \Rightarrow \bar{p}, (q \Rightarrow \bar{p}) \wedge r, (p \vee r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \bar{p}).$

Podformulami danej formuly sú všetky členy vytvárajúcej postupnosti.

Definícia

Pravdivostné ohodnotenie v výrokových premenných je **priradenie hodnoty 0 alebo 1** každej z týchto premenných.

Definícia

Pravdivostná hodnota $v(\alpha)$ výrokovej formuly α je priradenie hodnoty 0 alebo 1 pre formulu v súlade s nasledujúcimi pravidlami:

Ak $v(\alpha) = 1$ hovoríme, že formula α je **pravdivá pri ohodnotení v** .

Ak $v(\alpha) = 0$ hovoríme, že formula α je **nepravdivá pri ohodnotení v** .

Základy sémantiky výrokové logiky

Vlastnosti pravdivostného ohodnotenia formúl znázorňujeme pomocou **tabuliek pravdivostných hodnôt**. Pre základné logické spojky platí:

α	$\bar{\alpha}$
0	1
1	0

α	β	$\alpha \wedge \beta$	$\alpha \vee \beta$	$\alpha \Rightarrow \beta$	$\alpha \Leftrightarrow \beta$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Definícia

Formula sa nazýva **tautológia**, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných a **kontradikcia**, keď je pri každom ohodnotení výrokových premenných nepravdivá.

Formula je **splniteľná**, keď existuje také ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá. Systém formúl **$\mathcal{S}$ je splniteľný**, keď existuje také ohodnotenie výrokových premenných, pri ktorom sú pravdivé všetky formuly systému.

Operácie s binárnymi reláciami

Príklad

Rozhodnime, či formula $\varphi(x, y) : (y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \bar{x})$ je tautológia, kontradikcia alebo splniteľná formula.

Riešenie. Vytvorme tabuľku pravdivostných hodnôt pre danú formulu.

x	y	$y \Rightarrow x$	$y \vee \bar{x}$	$(y \Rightarrow x) \Leftrightarrow (y \vee \bar{x})$
0	0	1	1	1
0	1	0	1	0
1	0	1	0	0
1	1	1	1	1

Formula nie je tautológia ani kontradikcia. Je to splniteľná formula.

Definícia

Hovoríme, že **formula** φ (**sémanticky**) **vyplýva zo** (je **semantickým dôsledkom**) **systému formúl** $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď je pravdivá pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$. Zapisujeme $\mathcal{S} \models \varphi$.

Definícia

Hovoríme, že **systém formúl** $\mathcal{F}$ je (**sémantickým**) **dôsledkom** (sémanticky vyplýva zo) **systému formúl** $\mathcal{S}$ práve vtedy, keď všetky formuly zo systému $\mathcal{F}$ sú pravdivé pri každom ohodnotení výrokových premenných, pri ktorom je pravdivá každá formula zo systému $\mathcal{S}$. Zapisujeme $\mathcal{S} \models \mathcal{F}$.

Príklad

Rozhodnime, či platí $\mathcal{S} \models \alpha$, ak $\mathcal{S} = \{p \Rightarrow q, p \vee q\}$, $\alpha : \bar{q} \Rightarrow p$.

Riešenie.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \vee q$	α
0	0	1	0	0
0	1	1	1	1 ✓
1	0	0	1	1
1	1	1	1	1 ✓

$\mathcal{S} \models \alpha$ platí.

Sémantická ekvivalencia formúl

Definícia

Hovoríme, že formuly φ a ψ (resp. systémy formul $\mathcal{F}, \mathcal{S}$) sú **(sémanticky) ekvivalentné**, keď $\varphi \models \psi$ aj $\psi \models \varphi$ (resp. $\mathcal{F} \models \mathcal{S}$ aj $\mathcal{S} \models \mathcal{F}$). Fakt, že formuly φ a ψ (resp. systémy formúl $\mathcal{F}, \mathcal{S}$) sú ekvivalentné, zapisujeme $\varphi \models \psi$ (resp. $\mathcal{F} \models \mathcal{S}$).

Veta

Formuly φ a ψ sú (sémanticky) ekvivalentné práve vtedy, keď pre každé pravdivostné ohodnotenie v platí $v(\varphi) = v(\psi)$, t.j. $\varphi \Leftrightarrow \psi$ je tautológia.

Pre jednoduchosť píšeme: $\alpha \models \beta$ namiesto $\{\alpha\} \models \beta$

Veta

Platia nasledujúce tvrdenia:

- ❶ *Ak S je množina formúl a $\varphi \in S$, tak $S \models \varphi$.*
- ❷ *Tautológia je sémantickým dôsledkom každej množiny formúl S .*
- ❸ *Formula φ je tautológia práve vtedy, keď $\emptyset \models \varphi$.*
- ❹ *Každá formula je sémantickým dôsledkom množiny formúl $S = \{\varphi, \neg\varphi\}$.*
- ❺ *$S \models \varphi$ práve vtedy, keď systém $S \cup \neg\varphi$ je nespĺniteľný.*
- ❻ *$S, \varphi \models \psi$ práve vtedy, keď $S \models (\varphi \Rightarrow \psi)$.*

De Morganove vzorce a iné zákony

Nech α , β , γ sú formuly:

1 De Morganove vzorce:

1 $\overline{\alpha \wedge \beta} \models (\overline{\alpha} \vee \overline{\beta}),$

2 $\overline{\alpha \vee \beta} \models (\overline{\alpha} \wedge \overline{\beta}).$

2 **Komutatívny zákon:** $\alpha \wedge \beta \models \beta \wedge \alpha,$
 $\alpha \vee \beta \models \beta \vee \alpha.$

3 **Asociatívny zákon:** $\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) \models (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma,$
 $\alpha \vee (\beta \vee \gamma) \models (\alpha \vee \beta) \vee \gamma.$

4 **Distributívny zákon:** $\alpha \wedge (\beta \vee \gamma) \models (\alpha \wedge \beta) \vee (\alpha \wedge \gamma),$
 $\alpha \vee (\beta \wedge \gamma) \models (\alpha \vee \beta) \wedge (\alpha \vee \gamma).$

Ďalšie zákony zákony

- 1 **Idempotencia:** $\alpha \wedge \alpha \models \alpha$,
 $\alpha \vee \alpha \models \alpha$.
- 2 **Absorpcia:** $\alpha \wedge (\beta \vee \alpha) \models \alpha$,
 $\alpha \vee (\beta \wedge \alpha) \models \alpha$.
- 3 **Zákon dvojitej negácie:** $\overline{\overline{\alpha}} \models \alpha$.
- 4 **Zákon nahradenia implikácie:** $\alpha \Rightarrow \beta \models \overline{\alpha} \vee \beta$.

Ak je T tautológia a F kontradikcia, potom:

$$\begin{array}{ll} T \wedge \alpha \models \alpha, & T \vee \alpha \models T, \\ F \wedge \alpha \models F, & F \vee \alpha \models \alpha, \\ \alpha \wedge \overline{\alpha} \models F, & \alpha \vee \overline{\alpha} \models T. \end{array}$$