

KOMPLEXNÉ ČÍSLA

$a+bi$
 $1+2i$ i ... imaginárna jednotka
 $i^2 = -1$
 význam: $x^2+1=0$ $x^2=-1$ existujúce riešenie v $\mathbb{R}$ neexistujú
 ale v množine komplexných čísel $x^2=-1$ existujú riešenia
 $x_{1,2} = \pm i$ $i^2 = -1$
 $(-i)^2 = (-1)^2 \cdot i^2 = -1$

Def $\mathbb{C} = \{a+bi, a,b \in \mathbb{R}\}$ $i^2 = -1$

mnžina komplexných čísel

napr. $z_1 = 1+i$ $1-i$ $10-i$ 100
 $z_2 = 2+\sqrt{3}i$ $2i$ $100+0 \cdot i$
 $0+2i$

$z = a+bi$ $\leftarrow$ algebraický tvar komplex. čísla
 $a = \text{Re } z$ (reálna zložka)
 $b = \text{Im } z$ (imaginárna zložka)

OPERÁCIE s komplexnými číslami

med: $z_1 = a_1+bi$
 $z_2 = a_2+bi$

Uloha: $z_1 \pm z_2 = (a_1+bi) \pm (a_2+bi) = a_1 \pm a_2 + i(b_1 \pm b_2)$
 $z_1 \cdot z_2 = (a_1+bi)(a_2+bi) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ia_2b_1 + i^2b_1b_2 = a_1a_2 - b_1b_2 + i(a_1b_2 + a_2b_1)$

príklad: $z_1 = 1+2i$
 $z_2 = -2+3i$

$z_1 + z_2 = (1+2i) + (-2+3i) = -1+5i$
 $z_1 - z_2 = (1+2i) - (-2+3i) = 3-i$
 $z_1 \cdot z_2 = (1+2i)(-2+3i) = -2+3i-4i+6i^2 = -2-i-6 = -8-i$

$i^2 = -1$
 $i^3 = i \cdot i^2 = i \cdot (-1) = -i$
 $i^4 = i \cdot i^3 = i \cdot (-i) = -i^2 = 1$
 $i^5 = i \cdot i^4 = i \cdot 1 = i$
 $i^6 = i \cdot i^5 = i \cdot i = i^2 = -1$
 $i^7 = i \cdot i^6 = i \cdot (-1) = -i$

pojem: komplexne združené číslo ku komp. číslu $z = a+bi$

$\bar{z} = a-bi$

príklad: $z \cdot \bar{z} = (a+bi)(a-bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2$

potrebujeme n-operácie:

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+bi}{a_2+bi} \cdot \frac{a_2-bi}{a_2-bi} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$

príklad: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+2i}{-2+3i} \cdot \frac{-2-3i}{-2-3i} = \frac{-2-3i-4i-6i^2}{4+9} = \frac{-2-3i-4i+6}{13} = \frac{4-7i}{13}$

GEOMETRICKÁ INTERPRETÁCIA (KČ) (komplexné čísla)

právanie: reálne čísla $\mathbb{R}$

-158 158 0 1 2 π (každý bod reálnej osi = reálne číslo)

komplexné číslo

$z = a+bi$

reprezentácia alebo $[a,b]$

každé KČ vieme zobrazit ako bod roviny a naopak každému bodu roviny priradíme KČ

$\text{Im } z$

$\text{Re } z$

$z = a+bi$

$z = -1-2i$

ROVINA KČ NA MŔTVA GAUSSOVA ROVINA

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
 vzdialenosť bodu $[a,b]$ od bodu $[0,0]$
 MODUL KČ (absolútna hodnota komplexného čísla)

AMPLITÚDA KČ: φ (uhol, ktorý zvierajú spojnice s reálnou osou)
 ARGUMENT $\varphi \in (0, 2\pi)$

vieme: $\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$ $\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$

vyjadrenie KČ:

$z = a+bi = |z| \cdot \cos \varphi + i |z| \sin \varphi = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi) \leftarrow$ GONIOMETRICKÝ TVAR KČ

EXPONENCIÁLNY TVAR KČ

$z = |z| \cdot e^{i\varphi}$

(vyplýva z Eulerovho vzťahu)
 $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$

Význam (využitie) goniom. a expon. tvaru KČ:

1) operácie: nech $z_1 = |z_1| (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = |z_2| (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

$z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

nech $z_1 = |z_1| \cdot e^{i\varphi_1}$, $z_2 = |z_2| \cdot e^{i\varphi_2}$

potom $z_1 \cdot z_2 = |z_1| |z_2| \cdot e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} \cdot e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$

príklady: vyjadriť KČ v goniometrickom a expon. tvare:

1) $z_1 = 1+i$

$z_2 = -1+\sqrt{3}i$

$[1,1]$ $a=1, b=1$

$|-1+\sqrt{3}i| = \sqrt{1+3} = 2$

$\varphi = \arctan \frac{b}{a} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

vieme, použijeme $\sin \varphi = \frac{b}{|z|}$

$\cos \varphi = \frac{a}{|z|}$

$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \varphi = \frac{1}{2}$

pomocou si jednoducho overíme

$\varphi_0 = \frac{\pi}{3}$

$\varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$

goniom. tvar: $-1+\sqrt{3}i = 2 (\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3})$

expon. tvar: $-1+\sqrt{3}i = 2 \cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}$

UHŇOVANIE KČ MOIVREOVA VETA

máme $z = |z| (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$m \in \mathbb{N}$ $z^m = |z|^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi)$

príklad:

$(1+i)^8$

použijeme goniom. tvar

(viť príklad 1)

$1+i = \sqrt{2} (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$

príklad pomocou MOIVREOVEJ VETY

$(1+i)^8 = (\sqrt{2})^8 (\cos(8 \cdot \frac{\pi}{4}) + i \sin(8 \cdot \frac{\pi}{4})) = 16 (1 + i \cdot 0) = 16$

komplexné čísla nebúdu na $2 \cdot 2\pi$

príklady budú na cvičeniach z MAT2

2. ZP

príklady

TEÓRIA

(od príbehu funkcie po KČ (buz))

7.1. 2026

rozpis časov a miestností bude na stránke KMTT + mail.

neprídeš sa!

OPRAVNE ZP 21.1. (oprava 1. ZP)

28.1. (oprava 2. ZP)

na budúci prídeš s uz MOODLE -> bude informovaní

! DVOJHÁZOK s vyhlásenou levičkou!