DOBRÉ RÁNO :)

základné vlastnosti determinantov:

- regulárna matica, $|A| \neq 0$
- singulárna, ak $|A| = 0$
- $|A| = |A^T|$

príklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$$

$$|A^T| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = -2$$

- ak v determinante máme nulový riadok (alebo stĺpec), potom determinant $= 0$.

pr.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -8 & 2 & -4 & 5 \\ 7 & 9 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 0$$

- vplyv ekvivalentných úprav na vlastnosti determinantov:

1) zámena poradia riadkov (alebo stĺpcov)

↓ zmena znamienka determinantu

pr.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1.4 - 2.3 = \textcircled{-2}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3.2 - 4.1 = \textcircled{2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

2) pripočítanie násobku iného riadku k inému riadku:

nemení hodnotu determinantu

pr.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = \boxed{-2}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-3) \\ \swarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 1.(-2) - 0 = \boxed{-2}$$

3) násobenie riadku (alebo stĺpca) nenulovou konštantou k, tak

hodnota determinantu sa k-krát zväčší (zmenší)

pr.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2$$

$$\boxed{-2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ |\cdot 3 \end{matrix} \boxed{=} \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 12 \end{vmatrix} = 12 - 2.9 = \boxed{-6}$$

výpočet determinantu stupňa $n \geq 4$

ROZVOJ podľa „vhodného" riadku, alebo stĺpca

{pojmy: D_{ij} ... minor (subdeterminant) vzhľadom na prvok a_{ij} matice A

(vznikne z determinantu $|A|$ vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca)

pr.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \textcircled{4} & \cancel{5} & \cancel{6} \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} \qquad D_{21} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix}$$

a_{21}

2. riadok

1. stĺpec

A_{ij} - algebraický doplnok k prvku a_{ij} matice A }

$$\boxed{A_{ij} = (-1)^{i+j} . D_{ij}}$$

ROZVOJ PODĽA i-teho riadku $(\textcircled{a_{i1}}\ \textcircled{a_{i2}} \dots \textcircled{a_{in}})$

$$|A| = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}.A_{in}$$

ROZVOJ PODĽA j-teho stĺpca $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$ ← j-ty stĺpec

$$|A| = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$$

príklad:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ \boxed{1} & 2 & 3 & 4 \\ \boxed{4} & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-1) \,.\, |\cdot(-4) \\ \swarrow + \quad \swarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} \textcircled{0} & 1 & 1 & 1 \\ \textcircled{1} & 0 & 1 & 1 \\ \textcircled{0} & 2 & 2 & 3 \\ \textcircled{0} & 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

! „vhodný" ← tam kde sú nuly!

rozvoj podľa 1. stĺpca

$$0.A_{11} + 1.A_{21} + 0.A_{31} + 0.A_{41} =$$

$$= 1.\textcircled{A_{21}} = 1.(-1)^{2+1}.D_{21} = 1.(-1)^3.\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) \\ \swarrow + \end{matrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}$$

rozvoj podľa 2. riadku

$$= -\left(0.A_{21} + 0.A_{22} + 1.A_{23}\right) = -1.A_{23} = -1.(-1)^{2+3}.D_{23} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3 - 3 = \underline{\underline{-6}}$$

CRAMEROVO PRAVIDLO (riešenie sústavy $\boxed{n}$ rovníc o $\boxed{n}$ neznámych)

prípad, keď sústava má práve jedno riešenie

majme $n = 3$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

postup: vypočítam nasledovné determinanty:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0$$

(vtedy má sústava práve 1 riešenie)

↑ podmienka, za ktorej môžem použiť CRAMERA.

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \qquad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

riešenie sústavy: $x_1 = \frac{D_1}{D}$, $x_2 = \frac{D_2}{D}$, $x_3 = \frac{D_3}{D}$.

príklad:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 5 \\ 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 9 - 8 - (-8 + 6 + 6) = 1 \neq 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \end{array}$$

áno, môžem použiť CRAMERA

$$D_1 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \\ -1 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 8 + 15 + 2 - (2 + 12 + 10) = 1$$

$$\begin{array}{ccc} 2 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & -2 \end{array}$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \textcircled{1} & 2 & \textcircled{-1} \\ 3 & 5 & -2 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} |\cdot(-2) \,.\, 2 \\ \swarrow + \quad \swarrow + \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 6 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

rozvoj podľa 3. stĺpca

$$= -1.A_{13} + 0 + 0 = -1.(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} = -(3 - 6) = 3$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & -3 & -1 \end{vmatrix} = \dots = 2$$

riešenie:

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{1}{1} = 1 \qquad (x_1, x_2, x_3)^T = (1, 3, 2)^T$$

$$x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{3}{1} = 3$$

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{2}{1} = 2$$

INVERZNÁ MATICA

? k akej matici existuje inverzná matica?

? ako ju nájdem?

ak matica A je regulárna $(|A| \neq 0)$, potom k nej existuje INVERZNÁ MATICA (označujeme A^{-1}), taká, že

$$A.A^{-1} = A^{-1}.A = E$$

↑ jednotková matica.

Spôsoby hľadania inverznej matice:

1) $(\textcircled{A}|E) \sim (E|A^{-1})$

2) pomocou $\boxed{\text{adjungovanej matice}}$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\boxed{\operatorname{adj} A} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & & & \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}^T$$

A_{ij} je algebraický doplnok k prvku a_{ij} matice A.

príklad.

Daná je matica $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}$.

Nájdime A^{-1}, ak existuje.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{vmatrix} = 40 + 60 + 52 - (65 + 40 + 48) = -1 \neq 0$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \end{array}$$

existuje A^{-1}.

použime algebraické doplnky:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}.D_{11} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 40 = 0$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}.D_{12} = -\begin{vmatrix} 6 & 4 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = \textcircled{4}$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\textcircled{D_{13}} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = \textcircled{-5}$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.D_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}D_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 8 \end{vmatrix} = \textcircled{-5}$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}D_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 13 & 10 \end{vmatrix} = \textcircled{3}$$

$$\boxed{\begin{aligned} A_{31} &= -1 \\ A_{32} &= 2 \\ A_{33} &= -1 \end{aligned}}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ -5 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix} = A^{-1}}$$

skúška: $\underline{A.A^{-1}}$ resp. $A^{-1}.A$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix}} \cdot \underset{A^{-1}}{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0-4+5 & -2+5-3 & 1-2+1 \\ 0-20+20 & -12+25-12 & 6-10+4 \\ 0-40+40 & -26+50-24 & 13-20+8 \end{pmatrix} =$$

$3 \times \boxed{3}$ $\qquad \boxed{3} \times 3$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E$$

ü

použitie inverznej matice pri riešení sústav lineárnych rovníc:

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad |\cdot A^{-1}$$

(ak existuje A^{-1})

teda $|A| \neq 0$, vtedy máme práve jedno riešenie a vieme ho vyjadriť

$$\underbrace{A^{-1}.A}_{E}.\vec{x} = A^{-1}.\vec{b}$$

$$\boxed{\vec{x} = A^{-1}.\vec{b}}$$

príklad: riešme

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ 6x_1 + 5x_2 + 4x_3 &= 1 \\ 13x_1 + 10x_2 + 8x_3 &= 1 \end{aligned}$$

$$\boxed{A\vec{x} = \vec{b}}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 13 & 10 & 8 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

z predchádz. príkladu máme

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x} = A^{-1}.\vec{b} =$$

$$= \underset{3\times\boxed{3}}{\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -4 & 5 & -2 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{\boxed{3}\times 1}{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 0-2+1 \\ 5-2 \\ -3+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3)^T$$

príklad 1. spôsob hľadania inverznej matica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} |\cdot(-3) \,|\cdot(-4) \\ \swarrow + \\ \swarrow + \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \textcircled{+1} & -1 & +3 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 6 & -4 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ |\cdot(-1) |\cdot 7 \\ \swarrow + \end{matrix}$$

ekvivalentnými úpravami → E

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \textcircled{+1} & -17 & +7 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ |\cdot(-1) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \textcircled{1} & 0 & -16 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 7 & -1 \end{array}\right) |\cdot(-1) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -14 & 6 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -17 & 7 & -1 \end{array}\right)$$

A^{-1} D.Ú. skúška správnosti