

Matematika I, opak. – 1.cvičenie

príprava

Funkcia

Definição

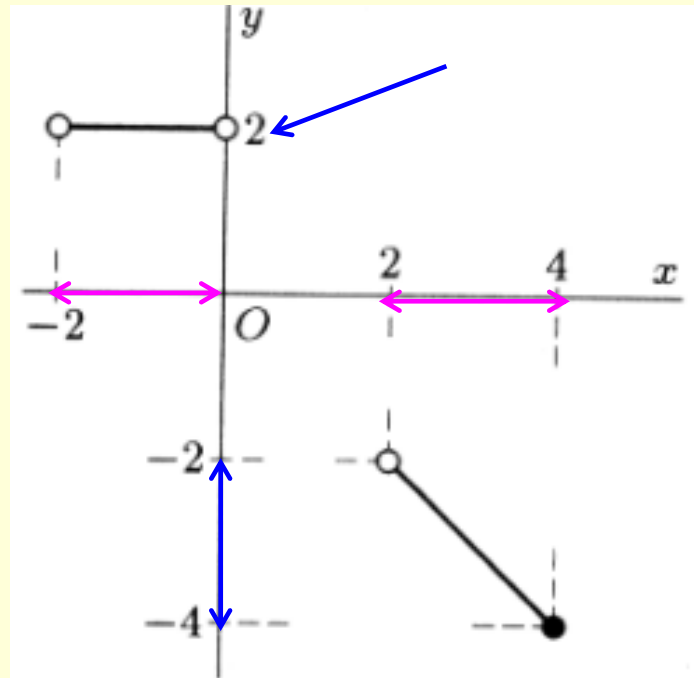
Nech $A, B \subset \mathbb{R}$ sú dve neprázdné množiny a f je pravidlo (predpis), ktoré každému $x \in A$ priraduje práve jeden prvok $f(x) \in B$. Potom hovoríme, že f je funkcia, ktorá zobrazuje množinu A do množiny B .

Píšeme

$$f : A \rightarrow B$$

- definičný obor funkcie $f: D(f) = A$ (x súradnice danej funkcie)
- obor hodnôt funkcie $f: H(f) = \{f(x) : x \in A\}$ (y súradnice danej funkcie)
- graf funkcie $f: G(f) = \{[x, f(x)] \in A \times B, x \in A\}$

$\underset{= y}{\circlearrowleft}$



$$D(f) = (-2, 0) \cup (2, 4) \quad \text{pozeráme na os } x$$

$$H(f) = \langle -4, -2 \rangle \cup \{2\} \quad \text{pozeráme na os } y$$

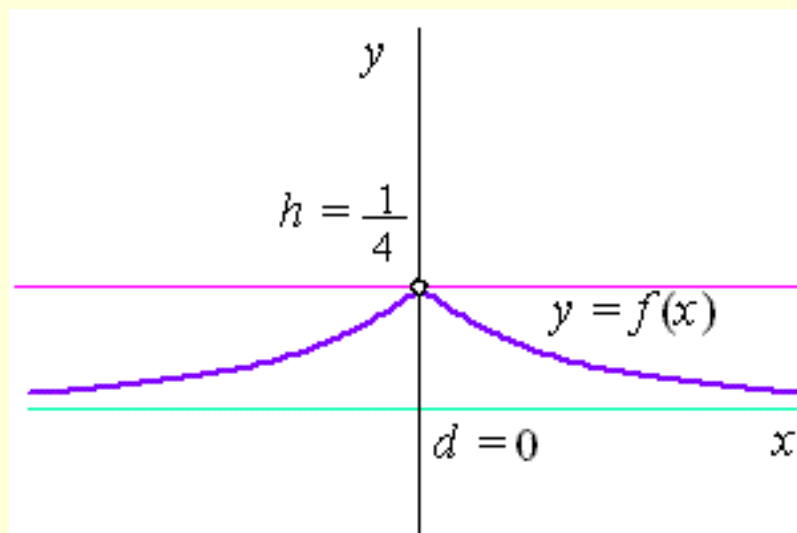
Niektoré vlastnosti funkcie

Definícia

Ohraničené funkcie

Funkciu f nazývame *zhora (zdola) ohraničenou na množine* $M \subset D(f)$, ak je *zhora (zdola) ohraničná množina jej funkčných hodnôt* $f(M) = \{f(x) : x \in M\}$.

Ak je funkcia f ohraničená zhora aj zdola na množine M , tak hovoríme, že je *ohraničená na množine* M



ohraničená zhora

ohraničená zdola

Niektoré vlastnosti funkcie

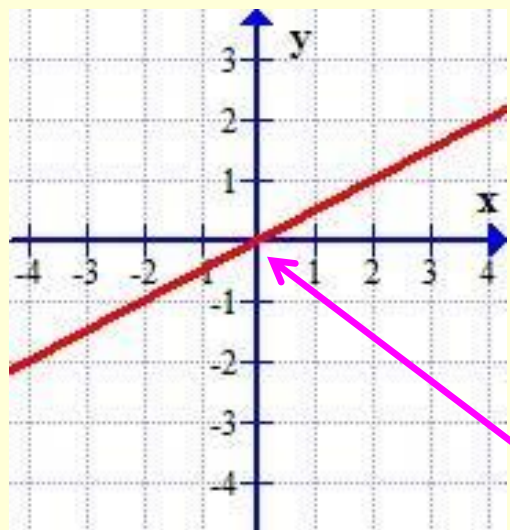
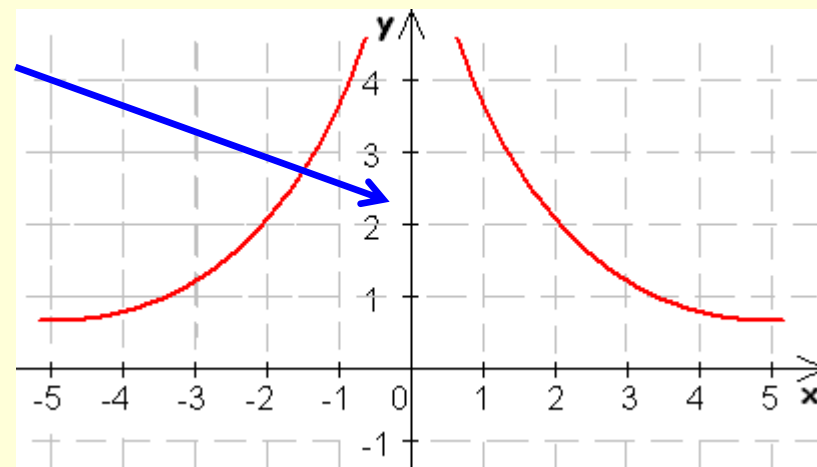
Definícia

Párne a nepárne funkcie

Funkcia f sa nazýva *párna*, resp. *nepárna*, ak platí

1. pre každé $x \in D(f)$ aj $-x \in D(f)$,
2. $f(x) = f(-x)$, resp. $f(-x) = -f(x)$ pre všetky $x \in D(f)$.

Graf párnej funkcie je symetrický podľa osi y



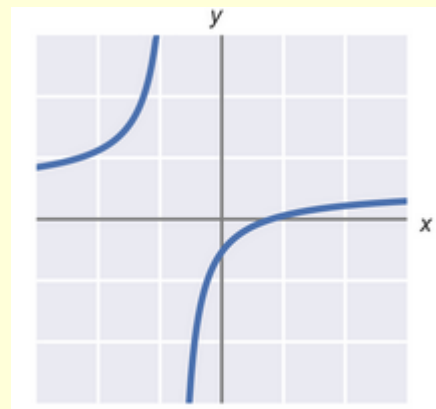
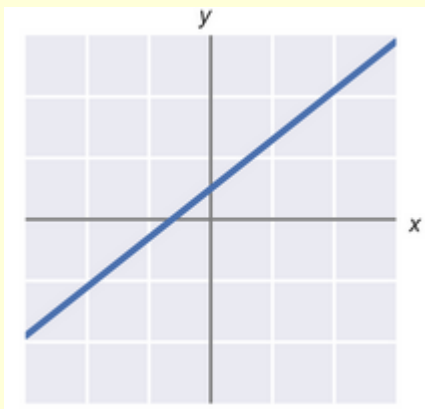
Graf nepárnej funkcie je symetrický podľa počiatku súradnicového systému

Niektoré vlastnosti funkcie

Definícia

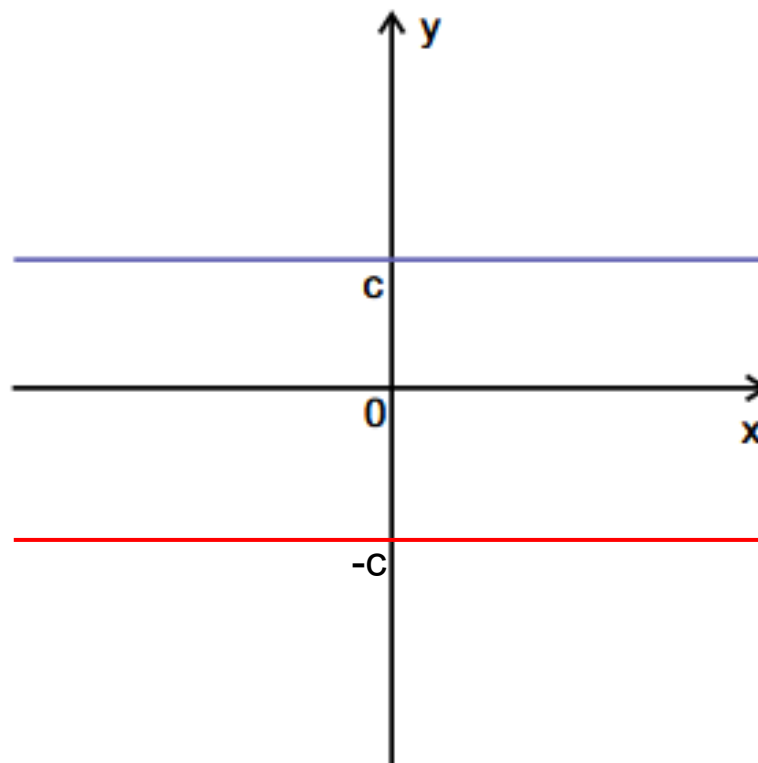
Prostá funkcia

Nech $f : A \rightarrow B$. Ak pre každé $x_1, x_2 \in A$ také, že $x_1 \neq x_2$ platí $f(x_1) \neq f(x_2)$, tak funkciu nazývame prostou.



Elementárne funkcie

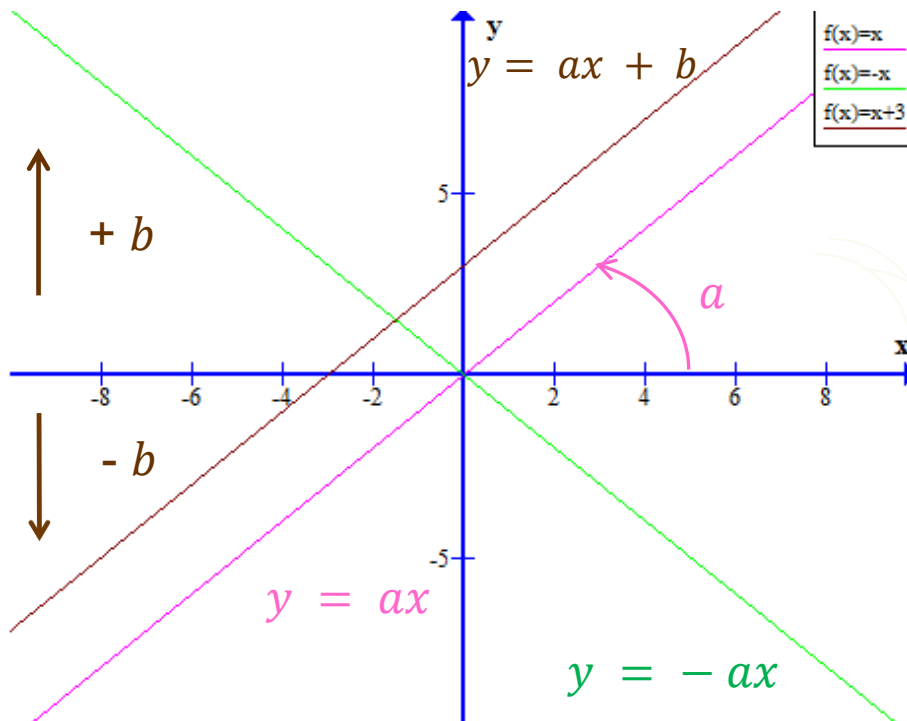
Konštantná funkcia $y = c, c \in \mathbb{R}$



Grafom je priamka rovnobežná s osou x. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Lineárna funkcia $y = ax + b, a \neq 0$



a - ovplyvní sklon priamky
 $-a$ - ovplyvní smer priamky
 b - posun na osi y

$y = ax$ - **nemá** priesečníky P_x, P_y

$y = ax + b$ - **má** priesečníky P_x, P_y

Postup pri zostrojovaní grafu:

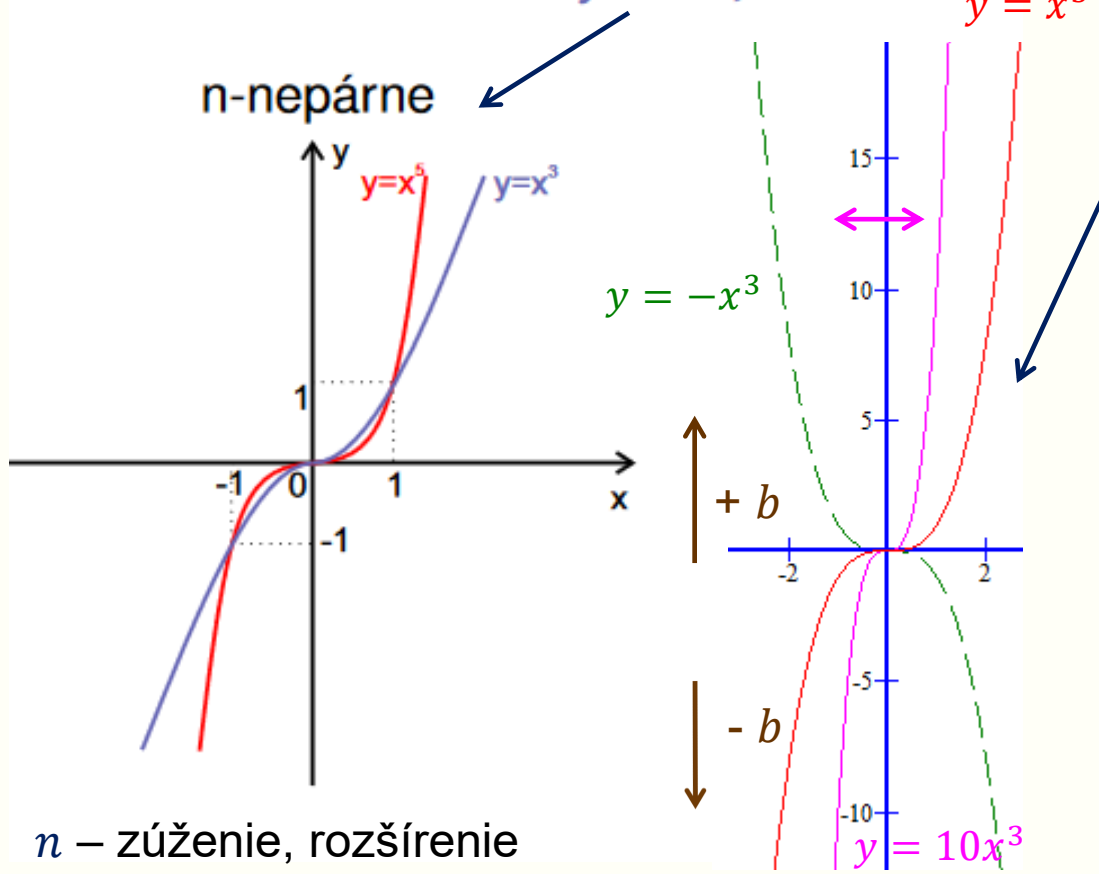
1. Určiť $D(f)$.
2. Pre dve hodnoty x z $D(f)$ vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
3. Viesť zvolenými bodmi priamku.

Grafom je priamka. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Mocninová funkcia $y = x^n, n \in \mathbb{N}$

n-nepárne



n – zúženie, rozšírenie

$y = a \cdot x^n$ - **má** priesečník $P_x = P_y$

$y = a \cdot x^n + b$ - **má** priesečníky P_x, P_y

a – zúženie, rozšírenie

$+a$ – orietácia 1. a 3. kvadrant

$-a$ – orietácia 2. a 4. kvadrant

b – posun na osi y

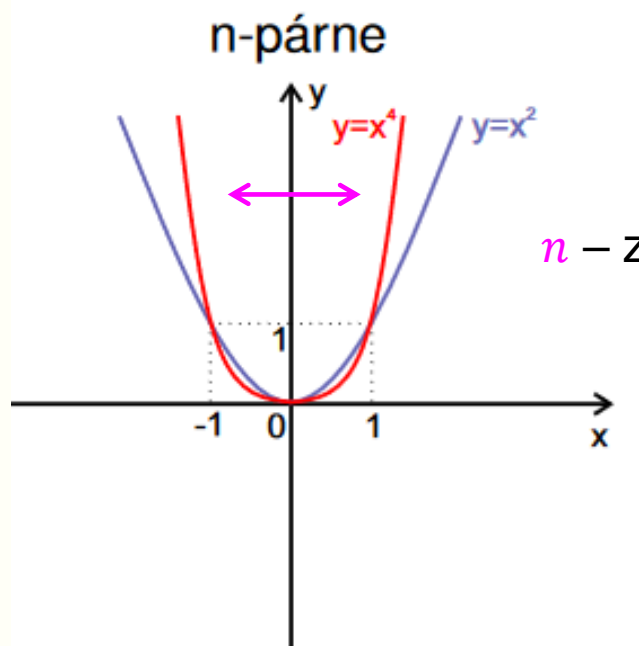
Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť priesečníky s osami.
3. Pre dva body z $D(f)$ vypočítame y (alebo pre jeden bod, ak funkcia má P_x).
4. Viesť krivku cez vypočítané body.

$D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Mocninová funkcia $y = x^n, n \in \mathbb{N}$



n – zúženie, rozšírenie

má priesečník $P_x = P_y$, je vrcholom V paraboly

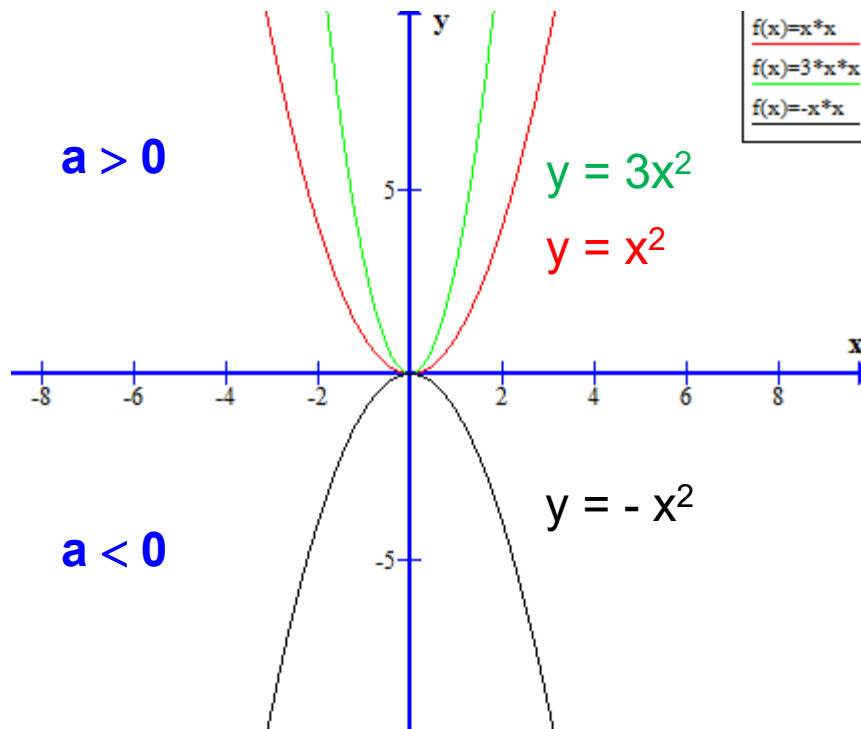
$D(f) = \mathbb{R}$

Grafom je parabola.

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$, $b = c = 0$
 $a \neq 0$

špeciálny prípad mocnínovej funkcie



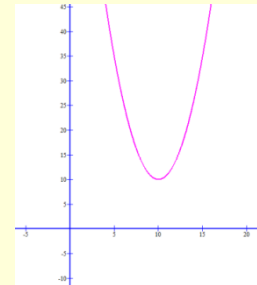
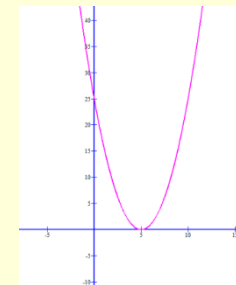
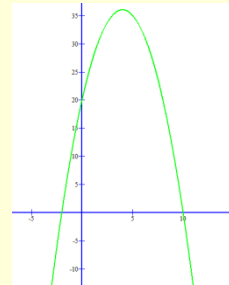
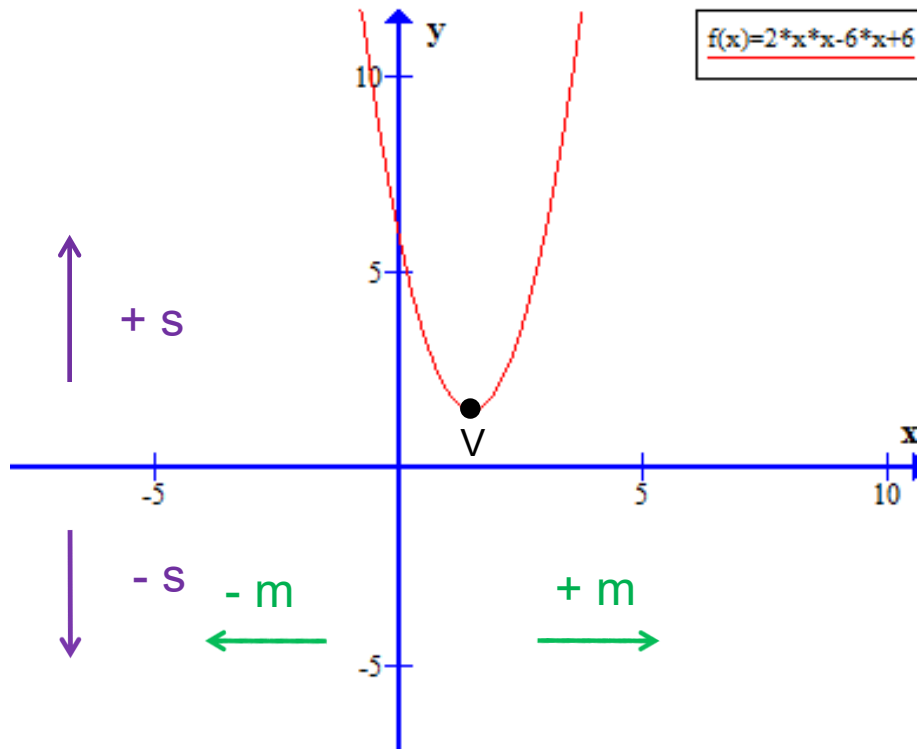
má priesečník $P_x = P_y$, je vrcholom V paraboly

a - ovplyvní strmosť funkcie
- a - orientácia funkcie

Grafom je parabola. $D(f) = \mathbb{R}$

Elementárne funkcie

Kvadratická funkcia $y = ax^2 + bx + c$



$D > 0$, **dva** priesečníky: x_1, x_2

$D = 0$, **jeden** priesečník: $x_1 = x_2$

$D < 0$, **nemá** priesečníky s osou x

$$y = ax^2 + bx + c \rightarrow y = a(x - m)^2 + s$$

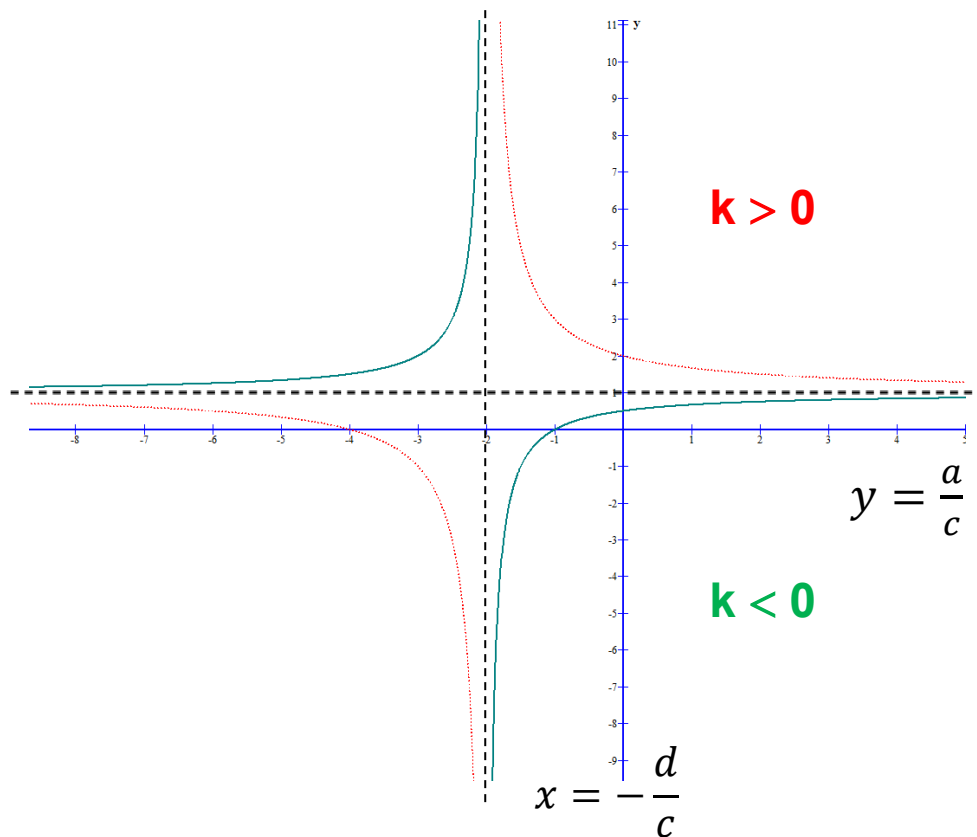
Vrchol paraboly: $V(m, s)$

m – posun na osi x

s – posun na osi y

Elementárne funkcie

Lomená funkcia $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ $a, b, c, d \in R$



$$y = \frac{ax + b}{cx + d} \rightarrow y = \frac{k}{x - m} + s$$

Asymptoty:

$$x = m = -\frac{d}{c} \quad \text{posun na osi } x$$

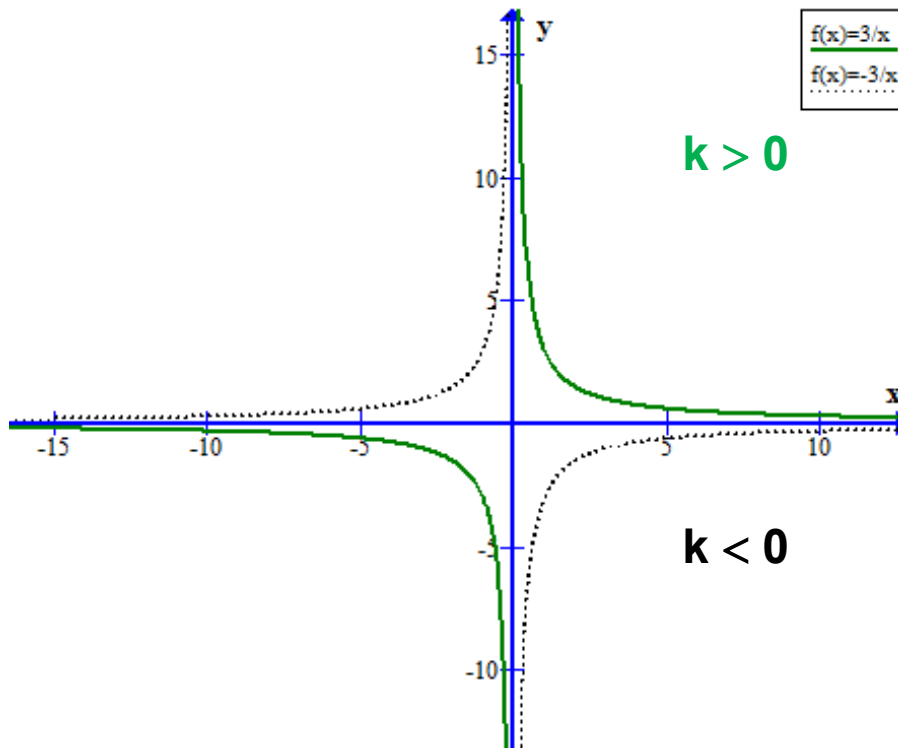
$$y = s = \frac{a}{c} \quad \text{posun na osi } y$$

Grafom je hyperbola. $D(f) = R - \{-\frac{d}{c}\}$

Elementárne funkcie

Lomená funkcia – nepriama úmernosť

$$y = \frac{k}{x} \quad k \in \mathbb{R} - \{0\}$$



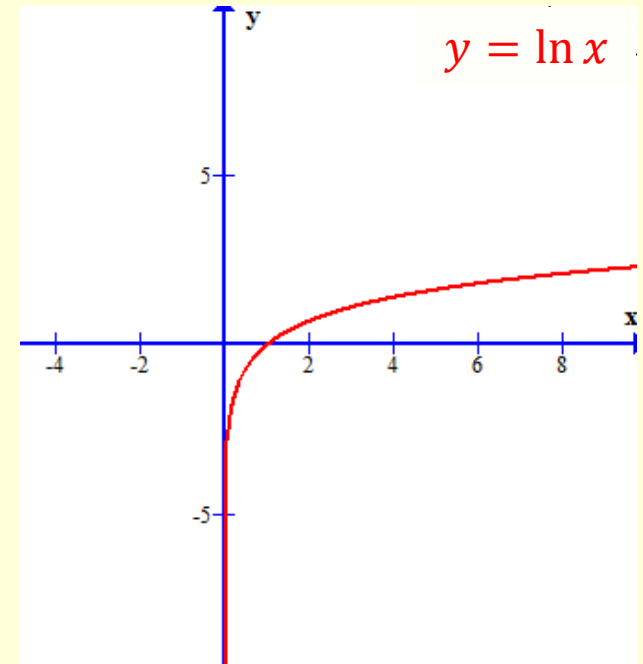
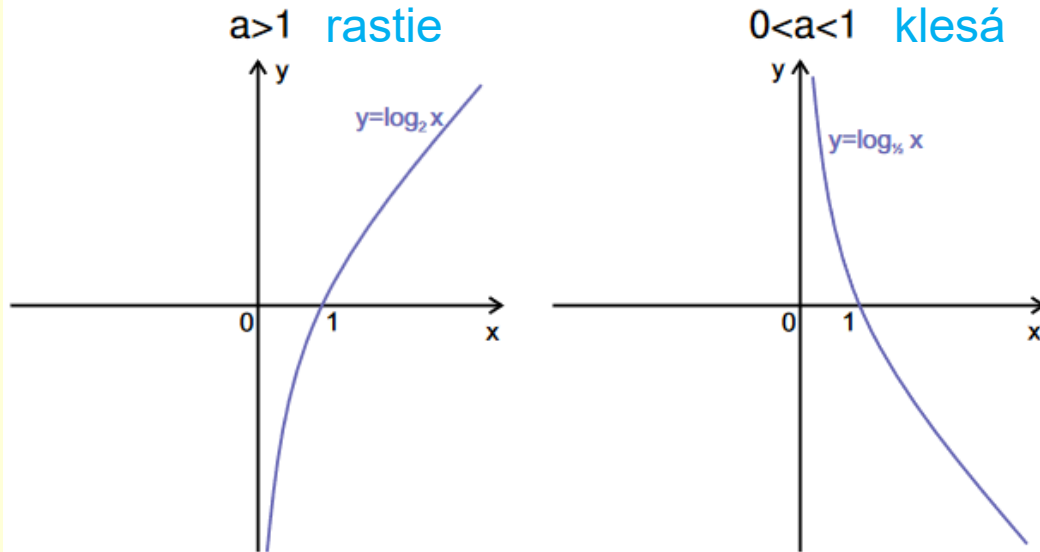
Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$.
2. Určiť polohu asymptót.
3. Vypočítať pre jeden zvolený bod z $D(f)$ jeho y súradnicu a viesť ním rameno hyperboly.
4. Symetricky viesť druhé rameno hyperboly v protíľahlom kvadrante.

Grafom je hyperbola. $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$

Elementárne funkcie

Logaritmická funkcia $y = \log_a x, a > 0, a \neq 1$



Číslo a nazývame základ funkcie.

$$D(f) = (0, \infty)$$

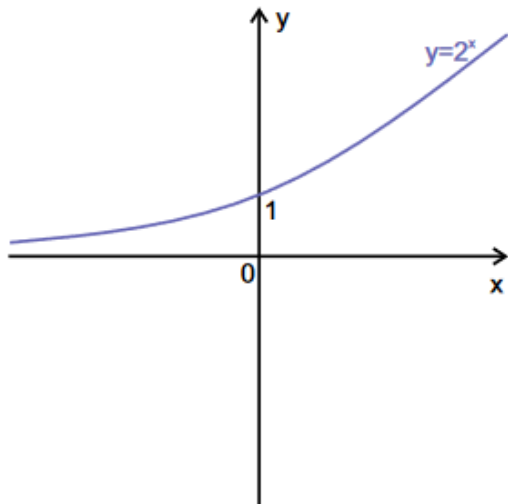
Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.

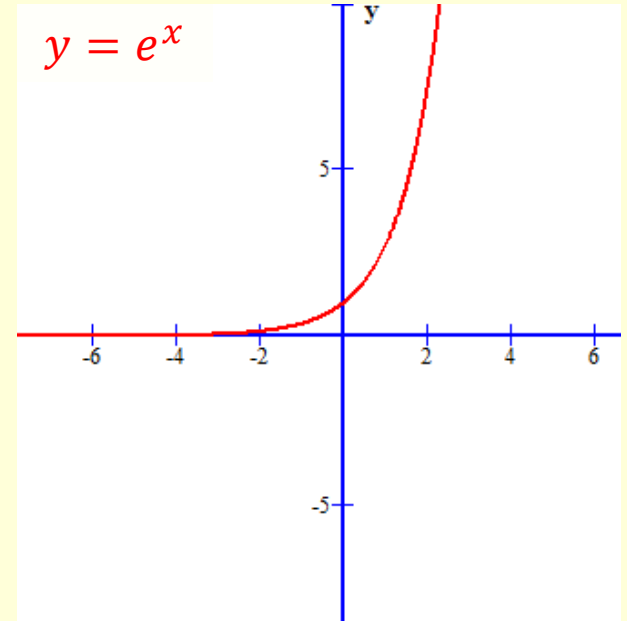
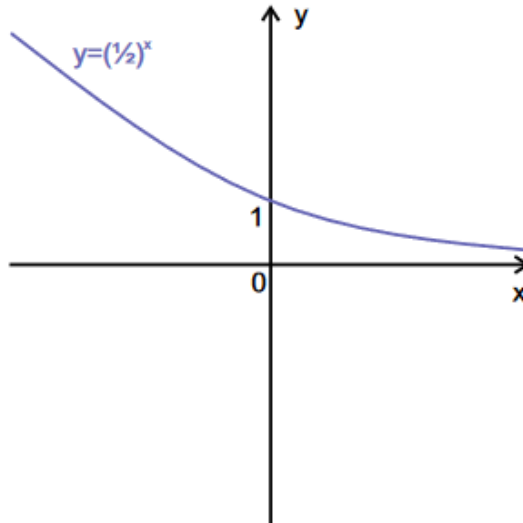
Elementárne funkcie

Exponenciálna funkcia $y = a^x, a > 0, a \neq 1$

$a > 1$ rastie



$0 < a < 1$ klesá



Číslo ***a*** nazývame základ funkcie.

$$D(f) = \mathbb{R}$$

Postup pri zostrojovaní grafu:

1. Určiť $D(f)$ a základ funkcie.
2. Určiť polohu asymptoty.
3. Pre dve hodnoty x z definičného odboru vypočítať y alebo určiť priesečníky s osou X a Y .
4. Viesť zvolenými bodmi krivku.